DOCTORAT AIX-MARSEILLE UNIVERSITE
délivré par
l'Université de Provence

N° attribué par la bibliothèque

|_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'AIX-MARSEILLE UNIVERSITE

Formation doctorale :
Philosophie (Epistémologie)

Présentée et soutenue publiquement

Par

BERNARD Julien

le 26 novembre 2010

TITRE :

Les fondements épistémologiques de la Nahegeometrie d'Hermann Weyl,

Une étude de la philosophie de l'espace-temps

dans *ESPACE-TEMPS-MATIERE*

Directeur de thèse :
MICHEL Alain,

Co-directrice de thèse
CROCCO Gabriella,

JURY

Mme. CROCCO Gabriella, professeur à l'Université de Provence
M. KERSZBERG Pierre, professeur à l'Université de Toulouse Le Mirail
M. KOUNEIHER Joseph, maître de conférences à l'Université de Nice
M. MICHEL Alain, professeur honoraire à l'Université de Provence
M. SCHOLZ Erhard, professeur à l'Université de Wuppertal
M. SZCZECINIARZ Jean-Jacques, professeur à l'Université Paris VII

Remerciements

Je tiens à remercier d'abord les interlocuteurs privilégiés qui ont suivi le déroulement de mon travail, mois après mois. Je veux bien sûr parler de mon directeur de thèse, Alain Michel, et de ma co-directrice de thèse, Gabriella Crocco. En tant que premier travail approfondi de recherche, une thèse de doctorat est aussi l'occasion de développer sa propre idée de l'essence de notre discipline, la philosophie, ou plus spécifiquement l'épistémologie, et où on peut choisir sa propre méthode d'investigation. Or, j'ai pu, grâce à eux, à la fois recevoir une écoute bienveillante et des conseils précieux pour préciser ma problématique et cibler mon étude, mais aussi conserver une liberté suffisante pour trouver ma propre voie dans ce délicat équilibre qu'il faut trouver dans la recherche en philosophie.

Je tiens ensuite à remercier les membres du jury qui ont bien voulu accepter de recevoir tardivement le premier exemplaire de ce travail, suite au calendrier serré des dernières semaines.

Je tiens particulièrement à remercier Erhard Scholz et l'université de Wuppertal pour leur accueil chaleureux, lors de mon cinquième semestre de travail. Cela m'a permis de me familiariser avec la langue allemande et de recevoir du Pr. Scholz de précieux conseils et idées directrices pour approfondir ma compréhension de la pensée d'Hermann Weyl.

L'achèvement de cette thèse dans un délai raisonnable a été permis grâce aux bonnes conditions de travail que j'ai pu trouvées dans le laboratoire du CEPERC où elle a été conçue, et grâce aux allocations de recherche qui m'ont été attribuées par les institutions françaises. En donnant aux jeunes chercheurs la chance de pouvoir se consacrer à plein temps à leur travail, ces institutions permettent de pouvoir envisager de tels travaux transdisciplinaires qui demandent un investissement et une concentration importante.

Enfin, je remercie également le Pr. Carlo Rovelli qui m'a permis d'acquérir, lors de mes premiers mois de travail, une compréhension rapide des principes de la théorie de la relativité générale, en me permettant d'assister à ses cours, et en répondant toujours avec la plus grande précision, rapidité et plaisir à toutes les questions techniques qui lui ont été adressées.

Quelques règles de production et d'utilisation de ce document

Langues : Nous avons uniformisé en français l'écriture du corps de notre travail en traduisant toutes les citations et titres d'ouvrages. Les textes originaux ont été placés en note de bas de page. Quand nous avons voulu mettre en évidence un terme ou une expression allemande dans le corps de la thèse, nous l'avons placé entre crochets. En revanche, dans la bibliographie à la fin de ce document, nous avons laissé les titres dans leur langue d'origine.

Citations : Les paragraphes cités figurent dans une police plus petite et avec un retrait supplémentaire par rapport au texte normal. Lorsque nous citons seulement un morceau de phrase, nous le plaçons directement entre guillemets dans le corps du texte.

Références : Nous utilisons en bas de page des sigles pour nous référer aux ouvrages cités. La signification des sigles figure dans la bibliographie à la fin du document. Quand un ouvrage n'intervient qu'à une seule reprise pour une idée isolée, nous donnons la référence directement en bas de page et ne la faisons pas figurer dans notre bibliographie.

Notations pour les formules mathématiques : Nous employons la convention d'Einstein pour les indices répétés lorsque les grandeurs concernées se comportent comme des tenseurs vis-à-vis de ces indices. Toujours en ce qui concerne les tenseurs, nous respectons l'usage de placer en haut les indices contravariants et en bas les indices covariants, sauf quand nous citons (dans ce cas nous respectons strictement l'écriture de l'auteur).

Les fondements épistémologiques de la Nahegeometrie d'Hermann Weyl,

Une étude de la philosophie de l'espace-temps dans *ESPACE-TEMPS-MATIERE*

Introduction

Une reconstruction de la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl

Le travail qui suit traite de la conception de l'espace-temps développée par Hermann Weyl dans la période s'étendant de 1917 à 1923. Cet auteur a été choisi à la fois pour la profondeur de ses travaux scientifiques en mathématiques et en physique, étant reconnu comme un des plus grands mathématiciens de son temps, mais aussi pour le rapport privilégié qu'il entretient avec la philosophie. Non seulement cet auteur est un connaisseur de la philosophie qui sait tenir à l'occasion le rôle d'historien ou de vulgarisateur de la pensée philosophique. Mais, il se sert en outre de la philosophie à l'intérieur même de son travail scientifique, soit en héritant de certaines postures philosophiques de la tradition, soit en produisant de nouvelles réflexions philosophiques sur les théories scientifiques en cours de développement ; réflexions nourrissant à leur tour la création scientifique.

La période 1917-1923 sur laquelle porte notre travail est caractérisée dans la carrière intellectuelle d'Hermann Weyl par une focalisation sur la théorie de la relativité générale et sur les fondements de la géométrie différentielle. Il faut cependant mettre à part quelques articles et une monographie très importante, *Le Continu*[1], où Hermann Weyl montre un intérêt renouvelé pour les fondements des mathématiques pures, c'est-à-dire de l'arithmétique et de l'analyse. Comment expliquer la juxtaposition de ces deux intérêts apparemment éloignés ? Notre entrée dans l'étude de la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl s'est faite par le biais de cette interrogation ; cette juxtaposition étant problématique dans la mesure où ces deux tâches semblaient reposer sur des positions philosophiques à première vue opposées.

D'un côté, les travaux d'Hermann Weyl de cette période sur les fondements de l'analyse situent sa pensée dans la lignée des penseurs *idéalistes*. En effet, aucune référence à une réalité mathématique transcendant l'esprit humain ne doit être invoquée selon lui pour justifier les procédés mathématiques de démonstration et de construction. Les objets mathématiques n'existent qu'en tant qu'ils sont saisissables par nos facultés cognitives. Ainsi, dans *Le Continu*, Hermann Weyl refuse d'admettre dans son ontologie toute entité mathématique qui ne serait pas le fruit d'une construction conceptuelle à partir des données immédiates de notre intuition. Aussi soutient-il une position *définitionniste* et *prédicativiste* sur les ensembles de rationnels qui servent à définir les nombres réels. C'est-à-dire qu'il accepte uniquement les ensembles qui sont, premièrement, définissables par une formule et, deuxièmement, tels que cette formule définitoire ne fasse intervenir aucune totalité

[1] [Weyl 1918a]

ensembliste à laquelle appartienne l'ensemble à définir. Pour légitimes qu'elles puissent paraître, chacune de ces restrictions place Hermann Weyl en opposition avec la lecture platonisante accompagnant communément la théorie des ensembles de Georg Cantor, qui commençait déjà à s'imposer à l'époque comme le cadre naturel pour développer l'analyse mathématique. Sans doute, cet état d'esprit idéaliste à l'égard des fondements de l'analyse présent dans *Le Continu*, prend une forme encore plus radicale en 1920 lorsqu'Hermann Weyl rejoint momentanément le courant intuitionniste de L.E.J. Brouwer.

D'un autre côté, les travaux d'Hermann Weyl sur la géométrie différentielle et la théorie de la relativité générale participent à asseoir définitivement une certaine vision des structures métriques qui semble à première vue ôter toute possibilité d'une épistémologie idéaliste concernant la notion d'espace. En remplaçant le cadre de la géométrie euclidienne ou, d'une façon plus générale, le cadre des géométries qu'on appelle « synthétiques », par le cadre de la géométrie différentielle, Hermann Weyl se place dans la lignée moderne de la géométrie où les structures métriques de l'espace cessent d'être parfaitement rationalisables et fixées définitivement par une axiomatique. La notion même *d'espace de Riemann*, sous-jacente à la théorie de la relativité générale, ne définit pas une structure métrique unique mais plutôt une famille d'espaces courbes au sein de laquelle la raison pure seule ne peut établir de discrimination. Ce fait avait déjà été établi par l'analyse épistémologique du mathématicien Bernhard Riemann, qui appelait de ce fait la science physique au secours des mathématiques pures, comme seul mode de connaissance susceptible d'achever la caractérisation de la métrique. Selon l'interprétation d'Hermann Weyl, la théorie d'Albert Einstein répond, plus de 60 ans après, à cet appel riemannien. Albert Einstein nous apprend en définitive que ce sont les lois de la gravitation qui achèvent la détermination de la métrique en exprimant comment la courbure de l'espace dépend localement du contenu de l'espace, par des lois physiques invariantes.

Cette lignée dans laquelle s'inscrit le travail d'Hermann Weyl le conduit donc à refuser tout idéalisme transcendantal de l'espace *dans le sens d'*une doctrine qui prêterait à l'esprit la capacité et la légitimité d'imposer un cadre métrique rigide comme celui d'Euclide, pouvant être fixé une fois pour toute par une axiomatique, et s'étendant sur la totalité du monde physique. Parce qu'Hermann Weyl comprenait de cette manière la thèse de l'idéalisme transcendantal telle qu'elle était défendue par Immanuel Kant, il voulait se démarquer de la philosophie de l'espace du philosophe allemand, encore si présente dans le milieu académique allemand du début du vingtième siècle. Au contraire de ce qui a lieu dans son travail sur les fondements de l'analyse, il semble donc qu'Hermann Weyl ne puisse donner de fondement à la notion de mesure spatiale, sans la référence à une réalité extérieure qui s'impose à nous : la métrique comme un champ physique dynamique dont les lois d'évolution nous sont découvertes par l'expérience.

Pour comprendre les raisons de ce contraste entre deux postures philosophiques apparemment opposées dans la pensée d'Hermann Weyl, nous avons centré notre analyse sur sa monographie : *Espace-Temps-Matière*. Il s'agit d'un manuel, issu d'un cours professé en 1917 à l'école polytechnique fédérale de Zürich, où Hermann Weyl présente de manière mi-historique, mi-génétique, la théorie de la relativité générale et les fondements sur lesquels elle s'appuie. Ces fondements sont un mélange de considérations géométriques, de considérations physiques et de considérations philosophiques. La première édition de cet ouvrage date de 1918. Les quatre éditions suivantes, seules à être publiées du vivant de l'auteur, l'ont été respectivement en 1918, 1919, 1921 et 1923. Outre la présentation de la théorie de la relativité générale et des concepts géométriques qui la sous-tendent, Hermann Weyl y insère, édition après édition, l'avancée de ses propres réflexions sur la notion d'espace(-temps)[2].

Au fur et à mesure de notre avancée dans la compréhension d'*Espace-Temps-Matière* et de notre recherche d'unité au sein de l'ouvrage, notre problématique s'est affinée. Il nous est apparu qu'au-delà de ces attitudes apparemment divergentes d'Hermann Weyl à l'égard des fondements des mathématiques pures et de la géométrie, se tenait un conflit peut-être plus profond encore, au sein même de sa pensée de l'espace. Nous nous référons ici à un antagonisme présent dans tout *Espace-Temps-Matière* entre deux notions d'espace.

Premièrement, on trouve l'espace comme notion mathématique ; la seule pour laquelle Hermann Weyl assume pleinement le terme d'« espace » [Raum]. Il s'agit d'une forme dont la nature est fixée *a priori* et dont la caractéristique essentielle est son homogénéité. La façon dont Hermann Weyl pense cette notion est fortement influencée par la tradition algébrique des géomètres du XIX$^{\text{ème}}$ siècle qui pensaient l'espace à travers son groupe de symétrie, c'est-à-dire le groupe des transformations préservant ses structures. On sait bien que cette tradition culmine avec le fameux programme d'Erlangen qui était encore développé à Göttingen par Felix Klein à l'époque de la formation d'Hermann Weyl. Conformément à cette tradition, ce dernier pense la notion mathématique d'espace en étudiant les groupes de transformations qui préservent chacune des strates de relations spatiales, notamment les strates affine et métrique.

---

[2] Nous utilisons les parenthèses ici, et nous les utiliserons souvent dans ce sens là, pour signifier que la notion qui occupe Weyl et sur laquelle nous nous focalisons est celle d'espace. Bien entendu, c'est un acquis irréversible de la théorie de la relativité restreinte qu'on ne peut développer une théorie physique des mesures spatiales indépendante de la considération des mesures temporelles. Il n'en reste pas moins que le temps pose des problèmes philosophiques et conceptuels qui lui sont propres et qui ne sont abordés que ponctuellement dans *Espace-Temps-Matière*. Le temps n'y est le plus souvent (et il le sera presque toujours pour nous) qu'une dimension supplémentaire qui doit nécessairement être prise en compte pour développer une théorie cohérente de la mesure.

Cette pensée unifiée de la notion mathématique d'espace est permise, dans le texte d'Hermann Weyl, par une analyse originale de la notion de *système de coordonnées* et de la place qu'il occupe dans le processus de la mesure. Alors que les relations spatiales sont pensées par l'intermédiaire de *structures conceptuelles*, le système de coordonnées est pensé a contrario comme un *donné intuitif* lié à la place singulière qu'occupe le sujet. L'espace n'est pas seulement homogène vis-à-vis de ses points mais plus généralement vis-à-vis des différents systèmes de coordonnées. On comprend alors que son homogénéité occupe une *fonction épistémique* essentielle. Elle est en effet la condition de possibilité de l'objectivité de la géométrie en exprimant une indifférence de la connaissance géométrique à l'égard de l'individualité des sujets qui appréhendent l'espace. Le jeu constant entre, d'une part, les relations géométriques objectives et, d'autre part, leurs différentes représentations numériques subjectives (i.e. dépendant des coordonnées), est essentiel en tant qu'il prépare l'ancrage du schème conceptuel dans la réalité effective. C'est par ce jeu, fondé sur ce qu'Hermann Weyl appelle « le principe de relativité de la mesure », que la notion mathématique d'espace peut servir de cadre à la mesure physique. Le processus de *l'abstraction mathématique* est la notion clef qui permet de penser ce jeu et fait le pont avec les travaux du *Continu*. Cette constitution de l'objectivité, par abstraction à partir des représentations numériques subjectives, s'étend ensuite de l'espace aux grandeurs physiques qui y sont représentées, par la considération de leurs différentes natures spatiales (vecteurs, tenseurs, etc.).

Cette analyse de la notion mathématique d'espace manifeste ainsi une forme d'idéalisme dans la pensée géométrique d'Hermann Weyl, au sens d'une emprise forte de la raison plutôt que de l'expérience sur le développement de la géométrie. Weyl propose une analyse de la notion mathématique d'espace comme forme qui insiste sur des principes comme la *continuité* et l'*homogénéité*, qui sont pensés comme des exigences que la géométrie doit remplir pour *satisfaire la raison* dans sa constitution d'une science objective de l'espace. Le niveau mathématique de la notion d'espace ne consiste ainsi pas en un foisonnement désorganisé de constructions de l'esprit entre lesquelles l'expérience seule peut ensuite trancher. La raison y a au contraire un rôle extrêmement contraignant qui délimite *a priori* la notion de mesure. La dose d'idéalisme que la majorité des commentateurs concèdent à la philosophie de l'espace d'Hermann Weyl est à rechercher selon nous dans cette utilisation des principes rationnels qui régulent la notion d'espace, et non pas dans les passages du texte où Hermann Weyl soutient expressément le caractère idéal de l'espace, en le qualifiant de « forme des apparences » ou de « forme de notre intuition ». Nous démontrerons en effet que, en raison du déplacement de sens opéré par Hermann Weyl dans la notion de sujet par rapport à la terminologie classique de la tradition idéaliste, ces qualificatifs sont employés par Weyl uniquement pour affirmer que l'objectivité ne doit se gagner qu'en se libérant de la singularité arbitraire du système de coordonnées.

Deuxièmement, à cet espace mathématique entièrement fixé conceptuellement et répondant à des exigences rationnelles, on oppose le champ métrique d'Einstein qui, comme nous l'avions aperçu dans notre problématique initiale, est dynamique et en un certain sens hétérogène du fait de son interaction avec la matière. Il s'agit en quelque sorte ici d'une *notion physique d'espace* dont la connaissance passe par l'expérience, mais pour laquelle Hermann Weyl évite le terme explicite d'« espace » [Raum], sans doute précisément pour marquer la rupture ontologique entre les deux concepts.

Sensible à la composante mathématique de toute théorie physique, Hermann Weyl ne conclut pas de cette découverte d'une composante empirique supplémentaire au cœur de la géométrie relativiste, au statut purement empirique de cette discipline. L'*a priori* n'a pas disparu, il s'est seulement déplacé. En fait, la conception physique de la métrique n'est pas opposée à la notion mathématique de l'espace au sens où elle viendrait la remplacer. La notion mathématique d'espace que nous avons présentée ci-dessus est bien plutôt un *moment* de la construction du concept physique de mesure spatiale. Mais, la théorie de la relativité générale oblige pourtant à une redistribution, au sein de la notion d'espace, entre ce qui est fixé *a priori* par la forme mathématique, et ce qui est susceptible de variations contingentes et est l'objet de mesures physiques. A cause de la dépendance manifestée par la théorie de la relativité générale, entre la courbure de l'espace et son contenu physique (l'impulsion de la masse-énergie), il n'est plus question de pouvoir faire se correspondre la délimitation entre l'*a priori* et l'empirique, avec la distinction entre un espace-contenant et la matière-contenue ; du moins tant qu'on suit la pensée commune qui fait de la structure des relations métriques un caractère essentiel de l'espace. Avec la théorie de la relativité générale, non seulement les relations métriques *entre les corps* contenus dans l'espace ne peuvent être évidemment déterminés que de façon empirique, mais il en est de même de la forme métrique *de l'espace lui-même*, dans le sens où la courbure affecte non pas uniquement la trajectoire particulière de tel ou tel corps singularisé, mais l'espace même de toutes les trajectoires possibles (les géodésiques de types « temps » de la théorie d'Einstein). On voit donc comment l'interrogation philosophique traditionnelle qui consistait à vouloir délimiter l'*a priori* et l'empirique dans le phénomène de la mesure physique, va se trouver déplacée, dans la pensée de Weyl, sous la forme d'une recherche de délimitation entre le mathématique et le physique, dans la constitution du nouveau concept relativiste d'espace.

La façon dont ces deux composantes de la notion d'espace peuvent s'articuler est problématique en raison de leurs propriétés radicalement opposées. D'un côté, nous avons l'espace mathématique comme une forme homogène déterminée *a priori* par la raison ; de l'autre, la métrique hétérogène de Riemann-Einstein, entité physique dynamique dont les lois d'évolution sont découvertes *a posteriori*. Aussi voit-on, dans le paragraphe 12 d'*Espace-Temps-Matière*, éclater le conflit entre ces deux notions antagonistes d'espace. Dans un petit texte où il semble mimer le fameux argument du trou d'Albert Einstein, Hermann Weyl interroge le statut du système de coordonnées et l'articulation entre mathématique et physique, dans ce nouveau cadre qu'est un espace de Riemann où la métrique est influencée par la matière. A partir de là, le motif qui dirige Weyl diverge de celui d'Einstein. Ce dernier était en quête d'une théorie qui réponde adéquatement à l'exigence d'une métrique *entièrement déterminée* par la distribution de la matière (ce qu'on connait dans la littérature sous le nom de « principe de Mach »). Le problème d'Hermann Weyl est tout autre. Il s'agit justement de résoudre le conflit entre une notion d'espace mathématique qu'il considère par essence homogène, et cette métrique dynamique que la dépendance envers la répartition de la matière rend hétérogène. En mettant en avant ce paragraphe d'*Espace-Temps-Matière*, nous pensons fournir une problématique épistémologique primordiale pour saisir dans son ensemble l'unité du texte et, ce faisant, l'unité de la philosophie de l'espace d'Hermann Weyl.

A la suite de ce passage, Hermann Weyl propose une première réponse radicale à cette problématique. Pour sauver l'homogénéité de l'espace, il en exclut d'une certaine manière l'aspect métrique. La métrique devient le résultat d'une interaction entre, d'une part, l'espace, par lui-même dépourvu de propriétés métriques et, d'autre part, la matière qui y est contenue. Cette solution, encore très inspirée par Albert Einstein, n'est cependant pas pleinement satisfaisante dans la mesure où ce schéma épistémologique cède plus qu'il n'est nécessaire à la notion physique de métrique comme champ dynamique. L'espace en soi, c'est-à-dire la notion mathématique d'espace comme forme homogène, semble ne pouvoir y trouver sa place qu'en étant débarrassée de toutes ses structures conceptuelles (affines, conformes, métriques…) pour ne garder qu'un caractère topologique et différentiel. L'espace(-temps) est alors réduit à la seule notion riemannienne de variété continue (ou différentiable).

Hermann Weyl n'en restera pas là. Dès ses travaux de 1918 qui suivent immédiatement la première édition d'*Espace-Temps-Matière*, il va petit à petit mettre en évidence et développer une solution beaucoup plus acceptable à ce conflit entre le caractère homogène et *a priori* de l'espace mathématique et le caractère hétérogène et dynamique de la métrique physique de Riemann-Einstein. Hermann Weyl, radicalisant un mouvement initié par Bernhard Riemann, va finalement situer la frontière entre les domaines d'application de ces deux notions, dans la distinction au sein des relations spatiales entre la sphère des relations proches et la sphère des relations éloignées. Ce que nous traduisons ici par le couple proche/éloigné est le couple de termes allemands Nahe/Fern que nous conserverons en allemand pour en garder toutes les nuances de sens[3].

[3]Ces termes signifient littéralement « proche » et « lointain ». Il faut toutefois savoir que cette traduction littérale nous fait perdre une partie importante du sens allemand. En effet, les termes Nahe/Fern sont aussi en allemand ceux qui sont employés en physique pour distinguer ce que nous appelons en français les « actions par contact »

L'idée de Nahegeometrie, qui va désormais guider tous les travaux d'Hermann Weyl sur les fondements de la géométrie, consiste alors à penser que seules les relations spatiales infinitésimales, c'est-à-dire celles qui concernent le voisinage infinitésimal d'un point, doivent être fixées *a priori*. A contrario, la structure des relations à distance finie n'est pas déterminée par la notion d'espace en soi, mais par son interaction avec la matière. Le rapport à l'expérience est alors requis.

En réunissant et réorganisant des réflexions éparses dans le texte de Weyl, nous avons essayé de mettre en évidence comment il justifie épistémologiquement le positionnement de cette frontière par une conception du sujet comme un être incarné dans un corps idéalement ponctuel, et fournissant de ce fait un point de vue essentiellement ponctuel sur le monde. Cette conception est illustrée par l'identification en mathématiques entre le sujet et l'origine du système de coordonnées, et en physique par la modélisation rudimentaire du sujet sous la forme d'un « œil ponctuel ». Ainsi, dans un monde physique où toute interaction est essentiellement localisée et ne se fait que « de proche en proche », le sujet n'a accès qu'à son environnement immédiat par l'entremise de son corps. Si, conformément à ce que nous suggère la tradition de l'idéaliste transcendantal, la raison est une faculté capable d'imposer *a priori* la forme de notre rapport au monde, cela ne peut pour Hermann Weyl être légitime que dans la sphère des relations de proximité [Nahe], seule domaine auquel le sujet soit rattaché immédiatement de par son incarnation dans un corps essentiellement localisé.

Conformément à ce principe fondamental d'une limitation à l'infinitésimal des structures imposées par la raison, Hermann Weyl va se lancer dans un vaste programme de reconstruction des sciences de l'espace, i.e. de la géométrie mathématique et de la géométrie physique, et de leur épistémologie. On peut désigner ce programme par le nom de la notion fondamentale qui le guide : la « Nahegeometrie », ou « géométrie infinitésimale ».

Sur le plan mathématique d'abord, Hermann Weyl va reconstruire la géométrie pour qu'elle réponde entièrement à cet idéal d'une Nahegeometrie. Partant de la notion de variété continue comme soubassement topologique, la strate des relations affines, puis la strate métrique, vont être déterminées *a priori* dans la seule sphère infinitésimale. Outre cette structure infinitésimale, on fixe également *a priori* le mode de connexion d'un espace infinitésimal à ses voisins. Ainsi, Hermann Weyl généralise-t-il la notion mathématique de

[Nahewirkung] par opposition aux « actions à distance » [Fernwirkung]. Il est essentiel de garder en tête cette polysémie des termes sur laquelle joue Hermann Weyl, car la conception infinitésimale de la géométrie qu'il va développer à partir de la 3ème édition d'*Espace-Temps-Matière* se présente en même temps comme le fondement naturel de la physique « moderne », conçue comme une physique des actions par contact.

connexion, apparue chez les géomètres continuateurs de la pensée de Riemann, pour en faire un concept général traversant méthodiquement, l'une après l'autre, les strates structurelles de la notion d'espace. D'abord, il parvient à construire une *notion purement affine de connexion*, en débarrassant la notion de connexion, telle qu'elle apparaissait dans les travaux de Tullio Levi-Civita, du présupposé d'une immersion dans un espace de Riemann. Ensuite, il déplace le sens de la forme quadratique $g_{\mu\nu}(x)$ qui servait à définir la notion d'espace de Riemann. En effet, en ne s'intéressant aux formes quadratiques qu'à une recalibration près par un facteur positif $\lambda(x)$ (jauge), il leur donne un sens seulement *conforme*, c'est-à-dire seulement relatif à la notion d'angle ou de rapport de longueurs et non pas relatif à la notion absolue de longueur. Enfin, il introduit l'idée de *connexion métrique,* se débarrassant ainsi du présupposé riemannien d'une notion de longueur qui ait une signification à distance. Ainsi, il atteint dès 1918 une telle géométrie, appelée aujourd'hui « espace de Weyl », qu'il considère comme une géométrie infinitésimale pure et qu'il incorpore à *Espace-Temps-Matière* à partir de la 3ème édition.

Sur le plan physique ensuite, Hermann Weyl montre comment les grandeurs et lois physiques connues jusqu'ici doivent être retranscrites, pour s'adapter à ce nouveau cadre d'une géométrie infinitésimale pure. Dans un premier temps, il se contente de poursuivre le mouvement initié par Albert Einstein, consistant à remplacer les opérateurs différentiels usuels de l'analyse sur un espace euclidien, par les opérateurs différentiels « covariants » sur une variété différentiable. Ainsi, la nouvelle géométrie permet d'exprimer des lois physiques différentielles qui décrivent des interactions se déroulant à l'intérieur d'un cadre métrique courbe qui *se comporte lui-même comme un champ dynamique*.

Hermann Weyl va tenter, ensuite, de poursuivre sa reconstruction physique au delà de la théorie d'Albert Einstein. Remarquant que son nouveau concept de connexion métrique possède certaines propriétés formelles communes avec le champ de potentiel électromagnétique, il propose une extension de la théorie d'Einstein qui permette de rendre compte de manière harmonieuse à la fois des phénomènes gravitationnels et des phénomènes électromagnétiques par une seule et même structure géométrique : celle d'un espace de Weyl. Après avoir proposé cette réunification des deux champs fondamentaux connus à l'époque, il tente de réduire la notion de matière elle-même à celle de champ, visant un monisme ontologique pour la physique qui, au niveau fondamental, réduirait toute les entités physiques à la seule notion de champ dynamique. Certains aspect de la matière résistaient en effet à une telle réduction, à commencer par le caractère granulaire de la matière (existence de « particules »). Pour expliquer la stabilité, du moins d'un point de vue statistique, des grains de matière, Hermann Weyl essaie d'adapter au nouveau cadre de la relativité générale une théorie de Gustav Mie qui modifie légèrement l'expression du champ électromagnétique sur de courtes distances, pour rendre compte de la stabilité des particules, sans recours à aucune hypothèse extérieure au comportement du champ lui-même. Les particules apparaissent dans une telle théorie comme des zones de condensation d'énergie, globalement stable, à l'intérieur du champ. La notion de particule devient donc secondaire, dérivée de la notion de champ, seule notion primitive.

Couplée avec la tentative initiale de réduction des interactions gravitationnelles et électromagnétiques aux propriétés géométriques d'un espace de Weyl, cette tentative de réduction ontologique de la matière aux champs entrainerait, si elle réussissait, une identification complète entre les domaines de la physique et de la géométrie. Autrement dit, à un niveau fondamental, toute la réalité physique serait ramenée à la dynamique d'un champ exprimant des propriétés géométriques. Ces deux idées d'une unification géométrique de la gravité et de l'électromagnétisme, et d'un monisme ontologique du champ, atteignent leurs apogées dans la 3ème édition d'*Espace-Temps-Matière*.

Plusieurs spécialistes[4] de la pensée d'Hermann Weyl ont étudié comment, dans la période correspondant aux deux dernières éditions d'*Espace-Temps-Matière*, ces nouvelles théories physiques appuyées sur le programme de la Nahegometrie ont été progressivement abandonnées par Hermann Weyl. Les motifs principaux de cette prise de recul tiennent à une évolution de sa conception de la matière. En tant que nous avons choisi de centrer notre travail sur la philosophie de l'espace-temps, et par conséquent de mettre à l'écart le problème de la matière, nous ne proposerons pas de nouvelle analyse sur les motifs de l'abandon de ces hypothèses physiques. L'important pour nous est de bien voir que, si Hermann Weyl cesse de penser que son programme de reconstruction de la géométrie puisse être au service d'une vision géométrique unifiée de la réalité physique, il n'abandonne pas pour autant, bien au contraire, le programme lui-même dans son ambition restreinte de caractériser la véritable notion d'espace.

A côté de ces réalisations mathématique et physique, le programme de la Nahegeometrie fournit une analyse épistémologique de la notion d'espace qui atteint son point culminant dans les dernières éditions d'*Espace-Temps-Matière* et ne sera sans doute jamais remise en cause par Hermann Weyl. Nous avons évoqué comment, en limitant la notion proprement mathématique d'espace à la sphère des relations infinitésimales, Hermann Weyl donnait son fondement à la géométrie physique, comme étude de l'objet physique : champ métrique dynamique. Concernant la notion d'espace, ceci est une concession à l'empirisme qu'Hermann Weyl juge irrémédiable. C'est ce trait de sa pensée qui peut nous le faire percevoir superficiellement comment un penseur réaliste à l'égard de l'espace, contrairement à son engagement clairement idéaliste concernant l'analyse mathématique. Nous voyons à présent que ce point de vue sur Hermann Weyl géomètre est

[4] Nous renverrons dans le corps de ce travail aux travaux d'Erhard Scholz et de Norman Sieroka sur cette question.

partiel. Au sein du concept général d'espace, le domaine d'influence où la raison peut légitimement poser ses exigences a certes été restreint chez Hermann Weyl, par rapport à l'idéalisme transcendantal kantien primitif. Cependant, au sein de son domaine restreint d'influence, c'est-à-dire la sphère des relations infinitésimale et de la connexion infinitésimale d'un point à ses voisins, la raison joue un rôle extrêmement contraignant dans la pensée de notre auteur. Son rôle est tel qu'Hermann Weyl soutient avec force que la nature de l'espace (toujours à comprendre au sens infinitésimal du terme) doit pouvoir être déterminée univoquement par des exigences rationnelles. Cette thèse justifie selon nous la proposition de Thomas Ryckman[5] consistant à ranger cet auteur au sein de la famille des idéalismes transcendantaux, même si le terme n'était pas assumé tel quel par notre auteur, et pourvu qu'on comprenne qu'il s'agit d'un *idéalisme transcendantal des structures infinitésimales de l'espace*.

La croyance liée à cette forme d'idéalisme devient effective dans les dernières années de notre période, dans les travaux d'Hermann Weyl sur *l'analyse mathématique du problème de l'espace*. Hermann Weyl arrive à donner une formulation algébrique de la notion de Nahegeometrie. Les structures infinitésimales en un point P de l'espace sont en effet exprimées par le groupe des isométries agissant sur l'espace tangent à notre variété au point P ; ce qu'Hermann Weyl appelle simplement des « rotations ». L'homogénéité s'exprime par le fait que ces groupes sont tous isomorphes. Enfin, la connexion d'un point de l'espace P à un de ses voisins P' est exprimée en caractérisant algébriquement l'ensemble des isométries qui envoient l'espace vectoriel tangent en P sur l'espace vectoriel tangent en P'. Là aussi, la nature de la connexion est identique en chaque point. Cette formulation algébrique de la notion de Nahegeometrie illustre clairement comment la pensée épistémologique d'Hermann Weyl arrive à réconcilier, d'une part, la tradition algébrique du programme d'Erlangen qui insiste sur la notion du groupe de transformations et sur l'homogénéité et, d'autre part, la tradition analytique de Bernhard Riemann. Cette réconciliation est permise par le nouveau sens local donné à l'homogénéité, conformément à l'idée de Nahegeometrie. A partir de cette analyse algébrique générale[6], Hermann Weyl démontre partiellement un théorème qui résout le problème de la détermination de la nature de la métrique. A partir de deux principes : 1) la liberté maximale accordée à la notion de connexion métrique, et 2) la détermination univoque de la connexion affine par la connexion métrique, Hermann Weyl démontre que les seuls groupes de « rotations » admissibles sont ceux qui laissent invariante une forme quadratique non dégénérée. Seule la forme pythagoricienne de la métrique est donc acceptable, et cette discrimination s'est appuyée uniquement sur des principes rationnels.

---

[5] [Ryckman 2005]

[6] Les notions algébriques invoquées font usage de concepts proches de ceux que nous connaissons de nos jours sous les termes de « groupes et algèbres de Lie ».

Méthode et plan de notre thèse

La reconstruction de l'unité de la philosophie de l'espace-temps dans *Espace-Temps-Matière* était une tâche transdisciplinaire qui demandait une familiarité avec les concepts et problématiques de la théorie de la relativité restreinte et générale ; une familiarité avec plusieurs branches des mathématiques : topologie, géométrie différentielle, calcul des variations, groupes et algèbres de Lie ; une connaissance de la langue allemande et du contexte philosophique et scientifique dans lequel évoluait Hermann Weyl ; enfin et surtout une connaissance de première main des textes de notre auteur.

De ce fait, comme dans tout travail en temps limité, nous avons évidemment dû faire face à des choix sur la perspective à privilégier pour aborder cette question, et nous avons dû nous limiter à un corpus de texte étroit mais suffisant pour répondre à la question posée.

Pour ce qui est de la question du corpus, le choix de la restriction au texte d'*Espace-Temps-Matière* dans ses différentes éditions était un choix qui allait de soi puisque ce texte se présente de lui-même comme un texte synthétique où Hermann Weyl essaie précisément de penser de manière unifiée ses réflexions sur la notion d'espace-temps et de matière. Nous avons dû cependant nous référer ponctuellement à quelques autres textes de la période 1917-1923, pour cette raison qu'*Espace-Temps-Matière*, en tant que manuel de cours, mêle de façon souvent inextricable les positions propres à Hermann Weyl avec celles des auteurs qui participent à l'histoire de la géométrie qu'il reconstruit. Toutefois, notre usage de ces autres textes s'est essentiellement limité à cette fonction de discrimination, au sein de l'ouvrage majeur, entre ce qui est propre à Hermann Weyl et ce qui n'y figure qu'en tant qu'épisode précédent de l'histoire du concept d'espace.

Reconstruire l'unité de la pensée de l'espace-temps d'Hermann Weyl était une démarche qui n'allait pas de soi de par la nature de ce texte. Plutôt qu'une articulation des deux concepts (mathématique et physique) d'espace, un lecteur pourrait être tenté de lire chronologiquement le passage du premier chapitre au second chapitre d'*Espace-Temps-Matière*, comme l'abandon d'une vision d'abord kleinienne de la géométrie au profit d'une vision riemannienne. Nous soutenons que cette interprétation ne rendrait pas justice au véritable effort conceptuel et épistémologique accompli par Hermann Weyl dans son texte pour réconcilier ces deux traditions.

Ensuite, la recherche d'une unité dans l'ouvrage se heurtait au changement du texte d'édition en édition. De ce point de vue, nous sommes conscients de proposer une vision beaucoup plus systématique et cohérente de la pensée de notre auteur que celle qu'un lecteur reçoit à la lecture spontanée des différentes éditions du texte. Il nous semble cependant que cette vision cohérente n'est pas le fruit d'une reconstruction artificielle de notre part, à partir de choix arbitraires, mais est une photographie du moment mature de la pensée d'Hermann Weyl de l'espace-temps, lorsque sa pensée a pu reposer de façon cohérente sur des principes épistémologiques pleinement assumés, ceux que nous avons regroupés sous le terme d'un appel à une Nahegeometrie. Cela correspond approximativement à la période 1919-1921. Notre texte de référence a donc été principalement la 3ème édition d'*Espace-Temps-Matière*, à laquelle nous avons ajouté les éléments apportés par l'analyse mathématique du problème de l'espace, ajoutés lors de la 4ème édition. Tous les passages d'*Espace-Temps-Matière* ou des autres textes de la période 1917-1923 où Hermann Weyl défend une position différente que celle que nous développons ici nous paraissent explicables, soit comme étant simplement l'exposition par Hermann Weyl d'une position qui n'est pas la sienne, soit comme constituant un moment précoce encore immature de sa pensée (passages des premières éditions d'*Espace-Temps-Matière*), soit au contraire comme constituant une prise de recul de Weyl vis-à-vis de sa propre position, au vu des difficultés rencontrées. Mais, encore une fois, ces reculs ne touchent qu'à la réduction ontologique de la matière aux champs et à la géométrisation complète de la physique, mais non pas à la vision de la géométrie comme Nahegeometrie.

Pour ce qui est de la perspective que nous avons choisi de privilégier, nous avons opté pour une position que l'on peut appuyer sur la vision propre à Hermann Weyl des rapports entre sciences et philosophie. Notre auteur défend une position selon laquelle les questions philosophiques concernant la théorie de la connaissance et l'ontologie de l'espace-temps ne trouvent pas de réponse préalablement au développement de la science, mais plutôt dans un dialogue avec elle. Sachant cela, nous avons choisi de faire resurgir l'unité du travail philosophique d'Hermann Weyl en essayant d'acquérir une familiarité avec son travail scientifique (et bien sur philosophique) interne à *Espace-Temps-Matière* et une vision globale des références scientifiques de ce texte (notamment Albert Einstein, James Clerk Maxwell, Carl Friedrich Gauss, Bernhard Riemann, Elwin Bruno Christoffel et Tullio Levi-Civita), plutôt qu'une familiarité avec les auteurs-philosophes qui sont ses références.

Pour compenser certaines faiblesses de cette approche, nous avons fait précéder notre propre recherche sur l'unité de la pensée de l'espace-temps d'Hermann Weyl, par un travail de synthèse **(Partie I.)** de certains travaux qui nous ont permis d'avoir une vision d'ensemble du contexte intellectuel (tant philosophique que scientifique) dans lequel est né la pensée d'Hermann Weyl. Le contexte spécifique au milieu intellectuel de Göttingen nous a très largement était ouvert par le biais de la thèse de Skuli Sigurdsson. Une vision globale de l'évolution des thèses d'Hermann Weyl pendant notre période et en dehors, nous a été fournie par une lecture des travaux d'Erhard Scholz. Enfin, les rapports d'Hermann Weyl à la philosophie ont été explicités à partir des textes de Weyl lui-même, mais aussi des travaux de Thomas Ryckman, Norman Sieroka, Alain Michel et Paulo Mancosu. En particulier, nous avons adhéré à la position générale, développée par Thomas Ryckman dans *The Reign of* *relativity*, selon laquelle Hermann Weyl est à ranger au sein d'une famille de penseurs idéalistes de la théorie de la relativité. Cette conviction était déjà née lors de nos premières lectures des textes d'Hermann Weyl, et nous l'avons éprouvée et affinée tout au long de notre travail.

A la suite de ce travail de synthèse, nous avons présenté **(Partie II.)** la façon dont est développée, dans la première partie d'*Espace-Temps-Matière*, la notion purement mathématique d'espace. Nous avons insisté sur l'influence du programme d'Erlangen, sur la place accordée à l'homogénéité, sur l'analyse originale par Weyl de la notion de sujet lié au système de coordonnées, sur la façon dont la notion d'abstraction mathématique développée dans *le Continu* sert à penser le jeu entre les niveaux objectifs et subjectifs, et enfin sur la façon dont la terminologie de Weyl peut nous induire en erreur quant à la façon dont on doit positionner sa pensée au sein de la famille des idéalismes transcendantaux de l'espace.

La géométrie différentielle et la dépendance des coefficients de la métrique à l'égard du contenu physique de l'espace font irruption ensuite **(Partie III.)**. Nous insistons sur la filiation de Friedrich Gauss et Bernhard Riemann à Hermann Weyl, sur la façon dont le conflit entre la notion mathématique homogène d'espace et la notion physique hétérogène de métrique éclate dans le paragraphe 12 d'*Espace-Temps-Matière*, et sur la solution provisoire qu'on y trouve, qui ôte à l'espace son caractère métrique pour le réduire à la notion de variété.

Enfin, nous finissons **(Partie IV.)** en explicitant la solution finale à ce conflit qui se dégage à partir de la 3ème édition d'*Espace-Temps-Matière*. Nous développons ainsi dans son unité le programme géométrique de la Nahegeometrie. Nous insistons sur l'architecture d'une Nahegeometrie, sur les idées épistémologiques qui la sous-tendent et en particulier l'analyse du sujet comme être ponctuel incarné, sur le développement mathématique du programme et la réussite d'Hermann Weyl à parvenir à une géométrie infinitésimale pure correctement stratifiée, sur la façon dont Hermann Weyl arrive à réconcilier la tradition algébrique du programme d'Erlangen avec la tradition analytique de Riemann par une déplacement vers l'infinitésimal de la notion d'homogénéité, sur un certain « idéalisme transcendantal des relations infinitésimales » qui aboutit à la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace, et sur la façon dont cette géométrie apparait naturellement comme le cadre naturel de la physique des champs. Enfin, nous terminons cette partie en évoquant les tentatives physiques (unification géométrique des champs, réduction de la matière au champ), secondaires par rapport à notre problématique, qui sont venues se greffer sur le programme de la Nahegeometrie.

Partie I Le contexte intellectuel de la formation d'Hermann Weyl

1. L'approche des sciences dans l'école de Göttingen

Nous allons commencer par parler en général du contexte historique intellectuel de la pensée d'Hermann Weyl, poursuivre en précisant la particularité de la période 1917-1923 dans sa carrière intellectuelle, exposer ensuite sa conception des rapports entre science et philosophie, et montrer en quoi cela nous a fourni une méthode de travail pour cette thèse. Enfin nous terminerons cette première partie en introduisant de façon générale le problème de l'espace et la forme spécifique qu'il prend dans *Espace-Temps-Matière*.

a. Vie d'Hermann Weyl, l'influence de Göttingen

Les biographes[7] résument ainsi la vie d'Hermlann Weyl (1888-1955). Il a étudié et produit ses premières œuvres intellectuelles dans le cadre de l'université de Göttingen, en particulier sa thèse de doctorat sous la direction de David Hilbert. Il obtient ensuite rapidement un poste comme privat-docent à l'école polytechnique fédérale (E.T.H.[8]) de Zurich. Il commence par étudier principalement la théorie des nombres, la théorie spectrale, la géométrie de Riemann et, plus ponctuellement, la théorie des ensembles et la topologie. La période de 1917-1923 que nous allons traiter en détail est caractérisée par une focalisation de ses travaux sur la théorie de la relativité générale et les fondements des mathématiques. Cette période comporte aussi ses deux tentatives physiques ensuite avortées : l'unification géométrique de l'électromagnétisme avec la gravitation, et la continuation du programme de Gustav Mie de réduction de la matière aux champs. Cette période est suivie par la publication en 1927 d'un important texte de philosophie des sciences, *la Philosophie des mathématiques et des sciences naturelles*[9]. A partir de 1923,

[7] La littérature biographique sur Hermann Weyl n'est pas abondante. Nous nous sommes référé principalement à [Sigurdsson 2001], [Chevalley-Weil 1954] et [Scholz 1994].

[8] Pour: Eidgenössische Technische Hochschule.

[9] [Weyl 1927]

Hermann Weyl ne s'impliquera plus directement dans les théories physiques, au sens où il développera des outils mathématiques pour celles-ci, mais sans pour autant désormais chercher à en modifier le contenu prédictif. Il consacrera l'essentiel de ses travaux aux mathématiques, et notamment à la classification des groupes de Lie et à la partie mathématique de la théorie de jauge[10]. Il occupera de 1929 à 1933 un poste à l'université de Göttingen mais sera amené à quitter l'Allemagne nazie pour les Etats-Unis, travaillant jusqu'à sa mort à l'IAS de Princeton où il collaborera notamment avec Albert Einstein.

Pour comprendre en quoi sa formation à Göttingen a pu jouer un rôle décisif dans le type d'approche scientifique d'Hermann Weyl, nous nous sommes appuyés pour l'essentiel sur la thèse de Skuli Sigurdsson : *Hermann Weyl, mathématiques et physique, 1900-1927*[11]. Ce qui va suivre dans les prochains paragraphes n'est donc pas le fruit d'un travail historique innovant mais d'un travail de sélection et de remise en forme, dans le travail de Sigurdsson et de quelques autres auteurs, de ce qui nous parait le plus pertinent au vu de notre propre sujet d'étude. Nous reprenons notamment ses citations illustrant comment les mathématiques pures et la recherche en science physique étaient associées à Göttingen. Notons enfin que nous avons choisi de nous centrer sur le contexte scientifique et épistémologique et d'éviter les considérations d'ordre psychologique ou sociologique.

De la formation d'Hermann Weyl, on a retenu les traits saillants qui suivent.

D'une part, sur le plan des échanges intellectuels, Hermann Weyl gardera depuis sa formation un rapport constant avec le milieu des penseurs de Göttingen. Skuli Sigurdsson montre que la communauté des penseurs liés à l'université de Göttingen, et qui ont influencé la pensée d'Hermann Weyl, est large. Il faut penser aussi bien aux professeurs qu'il a directement rencontrés à cette époque ou dont il a même suivi les cours (notamment : David Hilbert, Hermann Minkowski et Felix Klein), aux étudiants qu'il a côtoyés (notamment : Max Born et Richard Courant), aux professeurs qui sont venus travailler à Göttingen par la suite mais avec lesquels Weyl a pu avoir des échanges intellectuels (Emmy Noether, ou Wolfgang Pauli), mais aussi aux grands penseurs de Göttingen du XIX^ème^ siècle qui avaient laissé leur empreinte dans la façon dont la science y était pratiquée. Nous pensons ici avant tout à Carl Friedrich Gauss et à Bernhard Riemann. A toutes ces personnes qui ont travaillé dans le milieu de Göttingen, et qui ont constitué une part prépondérante des échanges intellectuels d'Hermann Weyl, Skuli Sigurdsson ajoute certains penseurs qui ne faisaient pas

[10] [Chevalley-Weil 1954]

[11] [Sigurdsson 1991]

partie à proprement dit de l'université de Göttingen, mais qui entretenaient avec Hermann Weyl des rapports réguliers[12].

Sur le plan de la méthodologie scientifique, ce contexte des penseurs de Göttingen est caractérisé par une interaction forte entre mathématiques et sciences physiques. C'était bien le milieu des mathématiciens de Göttingen et non pas celui des physiciens que Weyl fréquentait avant tout. Malgré cela, son contact avec la physique était permanent en tant que les grandes figures mathématiques de Göttingen (David Hilbert en tête, mais aussi Hermann Minkowski et Felix Klein) croyaient chacun à leur manière en une forte interaction entre la physique et les mathématiques, héritage notamment de l'approche de Friedrich Gauss et de Bernhard Riemann. Nous ne voulons pas dire ici que ces auteurs défendaient une position épistémologique identique concernant les rapports entre mathématiques et physique. Nous soulignons simplement, toujours avec Skuli Sigurdsson, qu'Hermann Weyl a appris à pratiquer la science dans un milieu où on considérait que les mathématiques ne pouvaient être pleinement fécondes qu'en interaction avec la science physique. De par l'importance que ces penseurs conféraient à cette interaction, on peut dégager une posture générale caractéristique du milieu de Göttingen, que nous appellerons avec Skuli Sigurdsson « réalisme de Göttingen »[13].

---

[12] Cf. [Sigurdsson 1991, vii]

[13] L'appellation « réalisme de Göttingen » [Göttingen realism] se trouve dans [Sigurdsson 1991, 17].

L'idée qu'une forme de pensée réaliste se trouve répandue à cette époque dans le milieu de Göttingen et même au-delà dans le milieu culturel allemand est un leitmotiv de la thèse de Skuli Sigurdsson. Il trouve une application de cette posture réaliste chez des auteurs aussi variés que les mathématiciens et physiciens de Göttingen, Max Planck, Albert Einstein, ou encore le philosophe Edmund Husserl. La profusion des exemples qu'il donne tient au fait qu'il ne s'intéresse pas à une position philosophique bien déterminée mais à une attitude générale dans la recherche scientifique qui repose sur la croyance en un monde caractérisé par une vérité unique répondant à des critères universels comme la simplicité, l'unité et l'harmonie ; critères qui correspondent par ailleurs à ceux qui guident le développement interne des mathématiques. La conséquence de cette croyance est une méthodologie scientifique qui consiste à vouloir faire avancer les théories physiques par un travail spéculatif de nature mathématique.

Selon Skuli Sigurdsson, cette attitude « réaliste » très générale aurait toujours indirectement rapport, en philosophie, avec une forme de platonisme. Nous sommes réservés sur ce point.

De plus, Sigurdsson s'intéresse à certains aspects « motivationnels » de cette attitude qui ont trait à une psychologie de la recherche scientifique liée à un contexte historique précis (dans ce cas : l'Allemagne de la République de Weimar). Dans notre propre travail, nous ne nous sommes pas préoccupés de ces aspects psychologiques et sociologiques, mais seulement de la question proprement épistémologique qui vise à comprendre comment on peut légitimer une méthodologie du travail scientifique où l'on prétend pouvoir faire progresser le savoir physique par le développement pur des mathématiques.

Enfin, le réalisme de Göttingen est exprimé dans le langage scientifique de l'époque par l'expression d'une « harmonie préétablie entre l'esprit mathématique et le monde physique ». Cf. plus bas p37.

Les principales références sur cette expression, sur le réalisme de Göttingen, sur celui d'Albert Einstein, et sur celui de Max Planck, pourront être retrouvées dans le travail de Skuli Sigurdsson. Cf. notre note 23 p28.

b. Mathématiques et physique à Göttingen

La recherche à Göttingen s'effectuait en continuité avec les programmes scientifiques de Carl Friedrich Gauss et de son disciple Bernhard Riemann qui avaient marqué la communauté mathématique du XIXème siècle[14]. Cela se caractérisait en particulier par une association étroite entre mathématiques et science physique. Ces deux disciplines devaient se développer en corrélation l'une avec l'autre ; cette corrélation ne devant être pensée ni comme une subordination des mathématiques à la physique, ni comme la subordination réciproque. D'un côté, on pensait que la physique était une source de fécondité pour les mathématiques par les problèmes nouveaux qu'elle met à jour et les nouvelles branches mathématiques qui en découlent. D'un autre côté, la créativité mathématique n'était pas bridée par la nécessité de coller au plus proche des outils physiques recherchés. Les généralisations mathématiques hardies étaient favorablement recherchées, même si les applications physiques de ces généralisations ne venaient qu'après coup. Les mathématiques pures devaient donc conserver leur mode propre de développement même si elles devaient emprunter certains de leurs problèmes et de leurs notions aux sciences physiques.

En ce qui concerne le dialogue avec la physique comme source de la fécondité des mathématiques, David Hilbert, chef de file des mathématiciens de Göttingen, donnait le ton. A ce propos, le discours cité par Skuli Sigurdsson, et que Hilbert prononça lors de son intervention en 1900 au congrès de Paris, est éloquent. Il y insistait sur le rôle de la physique qui consiste à fournir incessamment de nouvelles idées et de nouveaux problèmes aux mathématiques. Le dialogue entre physique et mathématique est un dialogue entre l'expérience et la pensée pure, seul moyen de rendre cette dernière féconde :

> « En même temps, pendant que le pouvoir créateur de la raison pure est au travail, le monde extérieur intervient, nous oblige à considérer de nouvelles questions issues de l'expérience actuelle et ouvre de nouvelles branches mathématiques. Et pendant que nous cherchons à conquérir ces nouveaux champs du savoir dans le domaine de la raison pure, nous trouvons souvent des réponses à d'anciens problèmes et donc, simultanément, nous développons d'une manière plus efficace les anciennes théories. Et il me semble que ces nombreuses et surprenantes analogies ainsi que cette apparente harmonie préétablie que le mathématicien perçoit si souvent dans les questions, idées, et méthodes des nombreuses branches de la science, ont leur origine dans ce jeu d'échanges perpétuel entre la pensée et l'expérience. »[15]

---

[14] Skuli Sigurdsson reproduit dans [Sigurdsson 1991, p. viii] un texte éloquent de Felix Klein où il parle de l'influence encore présente à son époque de ces grands mathématiciens du XIXème siècle. La référence est : Felix Klein, "The Present State of Mathematics", 1893, dans *Gesammelte mathematische Abhandlungen* (1922), vol. II, p.613-615.

[15] [Hilbert 1900, 3], cité dans [Sigurdsson 1991, 22]. (notre traduction)

A la suite de ce texte, David Hilbert s'insurge contre ceux qui voudraient réduire les mathématiques aux seuls domaines de l'arithmétique et de l'analyse, sous prétexte que ce seraient les seuls susceptibles d'un traitement rigoureux. Les mathématiques doivent importer des concepts issus des disciplines voisines, et cette importation commence avec la géométrie et la notion d'espace. Sans une telle ouverture sur les disciplines voisines, même le concept de nombre réel devrait être chassé des mathématiques qui se trouveraient considérablement réduites :

> Une interprétation aussi obtuse conduirait bientôt à ignorer tous les concepts qui émergent de la géométrie, de la mécanique et de la physique et conduirait à un arrêt du flux de matériaux nouveaux en provenance du monde extérieur. En fait, en dernière conséquence, cela conduirait au rejet des idées du continu et des nombres irrationnels. Quels nerfs importants, et vitaux pour la science mathématique, seraient alors tranchés par l'extraction de la géométrie et de la physique mathématique ![16]

Pour justifier cette étendue maximale qu'il voulait conserver aux mathématiques, David Hilbert voulait appliquer la méthode axiomatique, garante de rigueur, à l'ensemble des mathématiques et de la physique mathématique. Il avait déjà accompli une partie de ce projet dans le domaine de la géométrie, dans ses fameux *Fondements de la géométrie*[17] et appelait la communauté mathématique à étendre ce type de travail à la science physique dans l'énoncé de son 6ème problème mathématique[18].

Pour défendre une telle approche interdisciplinaire, David Hilbert pouvait compter sur les deux autres grandes figures mathématiques de Göttingen : Felix Klein et Hermann Minkowski. En favorisant cette approche, ils allaient à l'encontre du mouvement croissant de spécialisation des savants qui avait déjà atteint un point si avancé à l'époque que les mathématiciens et les physiciens avaient déjà tendance à méconnaître l'évolution de la discipline adjacente. L'unité de la science était en péril. Selon les mots de Richard Courant:

> […] le flot du développement scientifique menace de se disperser en de multiples embranchements qui finiraient par le réduire puis par l'assécher[19]

Pour répondre à cette menace, Hilbert et Klein œuvraient à Göttingen afin de maintenir un lien étroit entre physique et mathématiques pures. De nombreux étudiants de Göttingen furent marqués par cette approche interdisciplinaire comme Hermann Weyl,

---

[16] [Hilbert 1900, 3], cité dans [Sigurdsson 1991, 22] (notre traduction)

[17] [Hilbert, 1899]

[18] [Hilbert 1900].

[19] Richard Courant et David Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik I*, Préface à la première édition, Berlin : Julius Springer, 1924, p. vi. Notre traduction à partir de [Sigurdsson 1991, 1].

Richard Courant ou Max Born[20]. Cette association étroite entre mathématiques pures et science physique était absente d'autres milieux intellectuels de l'Allemagne du début du XX^ème^ siècle, par exemple celui de Berlin où les mathématiques pures étaient pratiquées pour elles-mêmes en continuité avec les pensées de Leopold Kronecker, Ernst Kummer et Karl Weierstrass[21].

c. La « posture réaliste » à Göttingen

Ce lien entre mathématiques pures et science physique à Göttingen avait pour cadre une certaine posture épistémologique que nous appellerons avec Skuli Sigurdsson « réalisme de Göttingen » et que nous allons caractériser. Précisons tout de suite qu'il s'agit moins d'une position épistémologique parfaitement déterminée, que l'on retrouverait à l'identique chez les différents membres du réseau de penseurs de Göttingen, que d'une attitude caractéristique de ce milieu et que l'on voit se décliner de diverses manières. Cette posture épistémologique consiste en une forte croyance en la capacité des mathématiques pures à fournir une connaissance des structures intimes du réel[22]. De fait, on trouve de nombreux témoignages de penseurs de l'époque[23], en particulier (mais pas seulement) de la part de membres du réseau de Göttingen, selon lesquels leurs recherches étaient guidées par une telle croyance.

Bien que les mathématiques soient un constituant essentiel de cette posture réaliste, il ne s'agit pas de l'interpréter au sens de ce que nous appelons de nos jours «un réalisme (ou platonisme) mathématique », c'est-à-dire une position qui consiste à expliquer la fécondité des mathématiques par la référence à un univers mathématique indépendant de notre esprit *et du monde sensible* que le mathématicien ne ferait que découvrir[24]. En fait,

[20] [Sigurdsson 1991, 3]

[21] [Sigurdsson 1991, 16]

[22] Cf. notamment [Sigurdsson, 1991 p ix], [Sigurdsson 1991, 13]

[23] Les références sur le réalisme de Göttingen et l'expression d'une « harmonie préétablie entre l'esprit mathématique et le monde physique » se trouvent :

Références générales : [Sigurdsson 1991, ix-x, xviii, 2-3, 88-89, 175-176] Chez Hermann Minkowski : [Sigurdsson 1991, 9-13, 16], chez Felix Klein [Sigurdsson 1991, 17-18], chez Albert Einstein [Sigurdsson 1991, 71, 98-100], chez Max Planck [Sigurdsson 1991, 13], chez Max Born : [Sigurdsson 1991, 115-117], chez David Hilbert [Sigurdsson 1991, 22, 70, 131-132], chez Hermann Weyl [Sigurdsson 1991, 168-169], sur le platonisme de Edmund Husserl [Sigurdsson 1991, 200-201].

[24] La position du réalisme platonicien, tel que nous venons de le décrire, n'allait pas de soi à Göttingen. Il suffit pour le voir de considérer, par exemple, les mathématiques développées par Hermann Weyl dans *Le Continu*, ou bien le point de vue finitiste que David Hilbert adopte dans sa méta-mathématique lors de ses tentatives de fondation des mathématiques. Rappelons que le terme « réalisme » est un des termes les plus équivoques de la

l'attitude que nous cherchons à caractériser ne concerne pas les mathématiques de façon isolée mais dans leur rapport à la nature. Il s'agit d'une croyance dans le fait que le développement des mathématiques, à partir de considérations qui leurs sont propres, a un rôle essentiel à jouer pour atteindre une connaissance des structures intime de la réalité *physique*.

Cette croyance ne se résume pas à la position, triviale depuis l'avènement de la physique classique avec Galilée, selon laquelle la physique doit s'écrire dans un langage mathématique. Au delà de cela, depuis l'avènement de la physique classique, on observe une progression constante du rôle joué par les mathématiques les plus abstraites et sophistiquées dans la construction du savoir physique. Cette progression s'accélère de façon brutale avec la réussite des deux théories de la relativité (1905 puis 1915) et se confirme avec la mécanique quantique, une décennie plus tard. Les mathématiques ne se contentent plus d'apporter la précision à la description des systèmes physiques en introduisant la notion de quantité, et d'exprimer les lois de la physique par des fonctions simples à variables réelles reliant les grandeurs physiques. Les mathématiques permettent désormais, en outre, de découvrir des relations qualitatives insoupçonnées entre les diverses grandeurs physiques par un travail de mise en évidence de structures abstraites.

Prenant acte de cette nouvelle place des mathématiques dans l'économie du savoir physique, les penseurs de Göttingen contemporains d'Hermann Weyl minimisaient le rôle de l'expérimentation en physique et favorisaient les recherches mathématiques pures les plus abstraites. Il s'agissait de produire des structures[25] mathématiques toujours plus générales

---

langue philosophique et doit être toujours être accompagné d'une précision de sens. Nous verrons en particulier que, même si la pensée d'Hermann Weyl trouve sa place dans cette posture globale typique de Göttingen et qu'on a choisi d'étiqueter par le terme de « réalisme » pour conserver le terme utilisé par Sigurdsson, sa position épistémologique en géométrie comme en mathématiques pure n'a rien d'un réalisme au sens philosophique strict. Cf. notre note 13p25 pour l'introduction de ce terme par Skuli Sigurdsson.

[25] En employant ici le terme de « structure », nous ne sous-entendons pas que les mathématiciens de ce milieu, ou plus généralement de cette époque, soutiendraient une position « structuraliste » sur les mathématiques comme le feront plus tard des groupes de mathématiciens tels que celui de Nicolas Bourbaki en France. Les mathématiciens de cette époque ne pensaient pas encore que la notion de « structure » pouvait désigner l'essence même de ce qu'est un objet mathématique même si c'était un aspect qui prenait une place de plus en plus conséquente. On voit déjà, chez Hermann Weyl en particulier, une importance accordée aux aspects structuraux des constructions mathématiques. Les nombreux passages où il expose la méthode axiomatique et ses bienfaits en sont une preuve. Cf. [Weyl 1927, 18-33] et [Weyl 1918a, 10-12] Les occurrences du terme allemand « Struktur » dans [RZM 1919] renvoient pour la plupart à des notions physiques (*structures* internes d'un système physique, *structures* intimes de la matière, etc.) On relève cependant au moins deux utilisations mathématiques de ce terme : une première en [RZM 1919, 17] pour parler de la « structure mathématique de l'espace » [mathematischen Struktur des Raumes] et en [RZM 1919, 130] pour parler de la « structure métrique » [metrische Struktur].

et parmi lesquelles il s'agissait ensuite de déterminer celles qui se trouvaient instanciées réellement dans la nature. Ces nouvelles constructions mathématiques générales devaient permettre d'unifier le domaine des sciences exactes (mathématiques pures, géométrie, science physique).

Sur le plan de la recherche de ces généralisations mathématiques unificatrices, les penseurs de Göttingen suivaient la voie que leur avait tracée leur illustre prédécesseur Bernhard Riemann au milieu du XIX^{ème} siècle. En généralisant la notion d'espace et de géométrie par le biais d'une notion différentielle de métrique, celle qui correspond à la structure appelée désormais « espace de Riemann », celui-ci avait non seulement contribué à une union plus étroite de la géométrie avec l'analyse mathématique, mais avait donné également la base sur laquelle pouvait être réunies la géométrie et la science physique. Bernhard Riemann avait déjà l'intuition que sa notion d'espace pouvait œuvrer à une telle unification, même s'il faudra attendre la théorie de la relativité générale pour voir véritablement cette idée à l'œuvre. C'est du moins l'interprétation que propose Hermann Weyl au moment où il construit sa propre conception de l'espace-temps.

On pourrait multiplier les exemples de mathématiciens de Göttingen qui, dans les années 1900-1925, recherchaient de nouveaux théorèmes mathématiques ou de nouvelles structures mathématiques dans le but de révéler certains liens insoupçonnés entre les diverses branches de la science physique, ou entre la physique et la géométrie. Nous renvoyons le lecteur à la thèse de Skuli Sigurdsson pour de nombreux exemples. Extrayons simplement de son travail deux cas exemplaires. D'abord celui d'Emmy Noether, mathématicienne venue à Göttingen en 1915 à la demande de David Hilbert et Felix Klein, qui mettait à profit son savoir algébrique pour produire une série de théorèmes mathématiques reliant les propriétés de symétrie des lagrangiens (ou des hamiltoniens) des théories physiques, à l'existence de quantités se conservant dans le temps. Ainsi, bien que ces théorèmes soient de nature mathématiques, ils avaient une utilisation physique immédiate. On pouvait déduire d'une symétrie physique observée, l'existence d'une grandeur physique se conservant dans le temps[26]. En donnant ainsi naissance à une

Dans le reste de notre travail, nous devrons toujours prendre le terme « structure » dans ce sens large, i.e. sans préjugé sur une doctrine de type structuraliste et encore moins en pensant à l'idée formaliste d'une manipulation quasi aveugle de symboles, aux antipodes de la pensée d'Hermann Weyl. Sur cette question du sens moderne précis du mot « structure » en mathématique par opposition à son utilisation plus lâche, voir : Leo Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, 1996, Birkäuser.

[26] L'idée clef des théorèmes de Noether peut être comprise à partir de la reformulation suivante dans un langage moderne et un contexte simplifié. On se place dans le cadre d'une théorie physique qui se laisse décrire par un lagrangien $L(q^i, \dot{q}^i, t)$, q^i désignant les coordonnées généralisées et $\dot{q}^i$ leurs dérivées par rapport au temps. Supposons que ce lagrangien admette une symétrie continue. Cela signifie qu'on peut définir un famille de transformations Q_i (s, t) (« s » paramètre variant sur un voisinage de 0 dans R) avec Q_i (0, t) = q_i (t), telle que le

méthode mathématique applicable pour découvrir plus aisément de nouvelles lois physiques, Emmy Noether participait à montrer la fertilité de la posture « réaliste » de Göttingen : les mathématiques, par leur mouvement propre, pouvaient bien être un moteur du développement de la science physique.

Développons un second exemple au sein même des travaux sur l'espace-temps d'Hermann Weyl. Il s'agit précisément du travail d'Hermann Weyl sur la géométrie infinitésimale sur laquelle portera la dernière partie de notre travail[27]. Nous ne rentrons bien sûr pas dans les détails pour le moment, puisque le but de ce paragraphe est simplement de montrer comment l'implication d'Hermann Weyl en physique s'inscrivait dans le même type de posture que celle qu'on trouvait chez les autres penseurs de Göttingen. En 1918, Weyl publie *Gravitation et électricité*[28], un texte où il généralise la notion d'espace de Riemann et utilise sa nouvelle géométrie pour tenter d'améliorer la théorie de la relativité générale en reliant le champ électromagnétique à la gravitation d'une manière plus harmonieuse que ne l'avait fait Einstein. La nouvelle structure mathématique qu'il construit est celle connue désormais sous le nom d'« espace de Weyl ». Il en développera les soubassements géométriques dans un autre texte, *La géométrie infinitésimale pure*[29], publié la même année. Nous reviendrons en détail, dans notre dernière partie (IV), sur cette structure géométrique et son apport physique. Ce qui nous intéresse pour l'instant sont les motifs qui

lagrangien soit invariant lorsqu'on opère une transformation de cette famille de paramètre proche de 0. Autrement dit, on pose que :

$$\left.\frac{\partial L\left(Q^i(s,t),\dot{Q}^i(s,t),t\right)}{\partial s}\right|_{s=0} = 0$$

Alors, le théorème de Noether affirme l'existence d'une grandeur qui se conserve dans le temps, à savoir :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\frac{\partial Q^i}{\partial s}\right|_{s=0}$$

où on a utilisé la convention d'Einstein pour les indices répétés. L'article original d'Emmy Noether va cependant plus loin que ce cas simplifié. Elle prend notamment en compte un « lagrangien » dépendant d'un nombre quelconque d'ordres de dérivation. Cf. [Noether 1918]

[27] Outre le texte de Sigurdsson, que nous suivons pour l'essentiel ici, on trouve une analyse similaire dans [Ryckman 2005, 11]. Thomas Ryckman explique la façon dont le travail d'Hermann Weyl peut être pensé comme une illustration de l'approche consistant à perfectionner la théorie mathématique par des considérations *a priori* pour chercher après coup une interprétation physique adéquate aux nouvelles structures introduites. Il rajoute de plus que ce type d'approche a continué à faire des émules après les travaux de Weyl. Ryckman cite un appel de Paul Dirac à l'utilisation de cette méthode. Il remarque de plus que l'approche d'Hermann Weyl contient en germe des éléments pour une interprétation non réaliste (au sens philosophique strict cette fois) de cette possibilité pour les mathématiques d'anticiper sur l'évolution de la physique.

[28] [Weyl, 1918c]

[29] [Weyl, 1918b]

ont poussé Hermann Weyl à proposer ce nouvel objet géométrique et le type d'arguments qu'il invoque pour justifier devant Albert Einstein l'interprétation physique de son travail.

On observe qu'Hermann Weyl est guidé non pas par de nouveaux résultats expérimentaux sur les rapports entre électromagnétisme et gravitation, mais bien par des motifs typiquement mathématiques. En effet, la notion d'espace de Riemann doit être généralisée, selon Hermann Weyl, car elle contient des éléments disparates. Cette notion manque d'harmonie puisque, dans un espace de Riemann, la notion de direction d'un vecteur est une notion locale, dans le sens où on ne peut comparer les directions des vecteurs que si ces derniers sont rattachés au même point de l'espace ; alors qu'au contraire, la notion de longueur (norme) d'un vecteur y est une notion non locale. Deux vecteurs peuvent toujours être comparés du point de vue de leur longueur, quelle que soit la distance entre les points auxquels ils sont rattachés. Si on déplace un vecteur « parallèlement à lui-même » le long d'une courbe fermée, il conserve nécessairement à la fin du parcours sa longueur mais non pas sa direction. Du point de vue d'une géométrie « infinitésimale » qui ne donne de sens immédiat qu'aux relations entre structures infiniment proches, il y a une impureté dans la notion d'espace de Riemann. Hermann Weyl veut y mettre fin. Le type d'espace qu'il propose (espace de Weyl) donne un sens local aussi bien à la notion de longueur qu'à la notion de direction d'un vecteur. On voit ainsi que cette généralisation construite par Hermann Weyl, bien qu'elle lui permette de proposer ensuite une nouvelle théorie physique, est motivée au départ par une réflexion *a priori* : la recherche d'une notion de métrique à la fois simple, générale et harmonieuse, répondant à l'idéal d'une géométrie purement locale, d'une Nahegeometrie pure[30].

---

[30] Dans [Sigurdsson 1991, 163-171], Sigurdsson analyse la correspondance entre Albert Einstein et Hermann Weyl concernant la généralisation de la théorie de la relativité générale que ce dernier propose, en liaison avec sa nouvelle géométrie infinitésimale. Skuli Sigurdsson montre bien la différence de perspective entre Albert Einstein et Hermann Weyl. Alors qu'Albert Einstein insiste avant tout sur des critères physiques ayant trait au comportement des règles et horloges, Hermann Weyl insiste plutôt sur des critères *a priori* comme l'harmonie et la cohérence du système qu'il propose. Skuli Sigurdsson interprète la position d'Hermann Weyl de façon réaliste comme étant justifiée par un appel à une réalité transcendante simple et harmonieuse, interprétation permise par les phrases provocatrices qu'Hermann Weyl lance à Albert Einstein, par exemple lorsqu'il lui affirme que, si sa géométrie infinitésimale n'était pas réalisée dans la nature, cela montrerait une « inconséquence mathématique dans la pensée divine ». (Notre traduction. Cf. [Sigurdsson 1991, 170])

Cette interprétation doit être nuancée. Au-delà de ces phrases provocatrices, les critères invoqués par Hermann Weyl sont ceux qui caractérisent le développement usuel des mathématiques (comme l'indique l'expression « inconséquence *mathématique* »). Or, prêter un point de vue réaliste à Hermann Weyl en mathématiques est problématique. De plus, au-delà de ces critères généraux de « cohérence » et d'« harmonie », l'idéal d'une géométrie infinitésimale pure est imposé chez Hermann Weyl par des motifs extra-mathématiques qui n'ont cependant rien d'un appel à une transcendance. Il s'agit d'une analyse épistémologique du sujet connaissant comme un être essentiellement ponctuel, localisé dans le monde, et d'une tentative d'exprimer mathématiquement l'idée du principe *physique* de l'action par contact.

Ainsi, il nous semble justifié d'opposer la perspective de Weyl à celle d'Einstein dans la mesure où le travail d'Hermann Weyl n'est justifié par aucune nouvelle analyse des notions physiques mais plutôt par des

Skuli Sigurdsson remarque la façon dont Weyl glisse insensiblement de ces exigences proprement mathématiques à un engagement métaphysique en faveur d'une réalité physique elle-même simple, unifiée et harmonieuse :

> Nous devons souligner que la géométrie qui a été développée ici est, d'un point de vue mathématique, la vraie géométrie de proximité [Nahegeometrie]. Il serait étrange qu'une autre géométrie de proximité, partielle et inconsistante, soit réalisée dans la Nature, associée à un champ électromagnétique qui y serait seulement accolé [ankleben]. Mais, il se pourrait bien-sûr que toute ma conception générale ne soit qu'une mauvaise piste. C'est toujours possible dans le cas de la spéculation pure. La comparaison avec l'expérience est évidemment requise.[31]

Par les exemples des travaux d'Emmy Noether sur les invariants et d'Hermann Weyl sur la structure d'« espace de Weyl », nous avons donné à voir concrètement cette attitude, caractéristique des mathématiciens de Göttingen, qui consiste à vouloir prendre part à l'évolution de la connaissance physique en développant, de façon *a priori*, de nouveaux outils mathématiques, ou de nouvelles structures mathématiques générales susceptibles d'être instanciées dans le monde et d'unifier certaines branches de la physique. Cette foi en les capacités de la raison mathématique à saisir les structures de la réalité physique d'une manière unifiée était telle que David Hilbert, et certains de ses proches, croyaient que l'époque étaient proche où les mathématiques pures fourniraient une ultime structure abstraite capable d'unifier en elle l'ensemble des lois de la nature[32].

---

considérations mathématiques *a priori*. En revanche, nous nous démarquons de l'analyse de Skuli Sigurdsson en ne voyant pas dans ces considérations *a priori* un appel à une transcendance, mais plutôt des motifs épistémologiques (analyse de la place du sujet dans l'élaboration de la géométrie) et ontologiques (au sens d'une ontologie de la physique où la nature des entités est exprimée par l'idée d'un champ dynamique dont les interactions se propagent à vitesse finie). Cette dernière composante de sa réflexion n'est bien sûr pas exempte de tout rapport à l'expérience, comprise dans son sens le plus général comprenant l'histoire de la physique et l'imposition progressive de cette ontologie des champs.

Il faut donc prendre avec précaution cette idée d'une préséance des mathématiques sur la physique dans le milieu de Göttingen, au moins quand on l'applique à Hermann Weyl. Cette idée n'est qu'un idéal jamais complètement réalisé bien que particulièrement présent dans ce milieu intellectuel.

[31] [Weyl 1918c, 42], notre traduction.

[32] Dans un hommage à David Hilbert écrit dans les années 1940, Hermann Weyl décrit l'état d'esprit des proches de David Hilbert dans les années de l'après-guerre :

> « Les espoirs dans le cercle de Hilbert étaient au plus haut à cette période. Le rêve d'une loi universelle rendant compte simultanément de la structure du Cosmos, pris comme un tout, et de toutes les particules atomiques semblait sur le point d'être accompli. »

Notre traduction d'après [Sigurdsson 1991, 88]. Le texte est tiré de "David Hilbert and his mathematical work", *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1944, 50, p. 612-654, dans [Weyl, GA vol IV, 130-172].

On trouve plusieurs phrases dans les textes d'Hermann Weyl qui montrent qu'il avait eu pour quelques temps l'espoir d'aboutir rapidement à une telle théorie unificatrice à l'aide sa géométrie infinitésimale pure. Par exemple :

La fin du texte de Weyl que nous avons cité à la page précédente, montre cependant qu'il est dans l'embarras face à sa propre approche spéculative, typique de la posture réaliste de Göttingen. L'embarras vient du fait que, malgré leur croyance dans le fait que les démarches propres aux mathématiques pures étaient sources d'un authentique savoir physique, les penseurs de Göttingen étaient évidemment conscients de la différence de statut épistémologique entre ces deux disciplines. Dans le cas de la physique, Hermann Weyl se trouve obligé de reconnaître que « l'expérience est évidemment requise ». Si certaines structures mathématiques peuvent être en adéquation avec le réel physique, cela n'est pas parce que les énoncés mathématiques ont par eux-mêmes un statut physique. Même si les mathématiques importent des concepts et des problèmes de la physique, leurs énoncés ne sont pas induits de l'expérience. Les mathématiques restent une discipline *a priori* constituée de constructions de l'esprit. Elles se développent en suivant des critères qui leur sont propres : recherches de généralisations des théorèmes par la construction de structures mathématiques abstraites plus générales, recherche d'unification entre divers résultats ou branches mathématiques, critères de simplicité, d'harmonie, etc.

Comment expliquer que, malgré les principes et les statuts épistémologiques différents qui sont les leurs, mathématiques et physique coopèrent d'une façon inattendue à la découverte des structures objectives de la réalité ? Cette adéquation entre la sphère mathématique et la sphère physique est d'autant plus étonnante que les mathématiques *anticipent* souvent sur la connaissance physique. Plus précisément, une structure mathématique est découverte indépendamment de tout rapport à l'expérience, en suivant des motifs purement mathématiques tels que ceux que nous avons énumérés à la fin du précédent paragraphe. On découvre seulement ensuite que cette structure se trouve instanciée dans la nature et qu'elle nous en révèle un aspect fondamental. C'est bien à une telle anticipation que nous avons eu affaire dans l'exemple donné ci-dessus de la notion d'espace de Riemann, découverte par le mathématicien éponyme plus de soixante ans avant que l'on découvre qu'elle est le cadre naturel pour exprimer les rapports entre gravitation, mécanique et géométrie. Hermann Weyl insiste sur cette anticipation qui est d'autant plus frappante que Riemann faisait part de ses attentes envers une nouvelle théorie physique qui

---

> « Je suis assez hardi pour croire que la totalité des phénomènes physiques peut être dérivée d'une unique loi universelle concernant le *monde* [au sens technique de l'espace-temps], de la plus haute simplicité mathématique. […] Dans cette note [Il parle de « *Reine Inifinitesimalgeometrie* »], je voudrais développer cette géométrie infinitésimale pure qui, j'en suis convaincu, comprend le monde physique comme un cas particulier. »

Notre traduction. [Weyl 1918c, 2]:

> „4) Ich bin verwegen genug, zu glauben, daß die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen sich aus einem einzigen universellen Weltgesetz von höchster mathematischer Einfachheit herleiten läßt. […] In dieser Note möchte ich jene *reine Infinitesimalgeometrie* entwickeln, die nach meiner Überzeugung die physikalische Welt als einen Sonderfall in sich begreift."

viendrait compléter son travail mathématique. Cela fait de lui, selon les mots de Weyl un prophète de la théorie de la relativité générale[33].

Hermann Weyl, préférait parfois illustrer ce pouvoir anticipateur de la recherche mathématique sur les découvertes physiques, par l'exemple des travaux de David Hilbert sur les opérateurs linéaires symétriques et leurs valeurs propres :

> C'est alors qu'est advenu un de ces événements qui ne sauraient être prévus même par l'imagination la plus débridée, un de ceux qui pourraient nous inciter à croire en une harmonie préétablie entre la nature physique et l'esprit mathématique : vingt ans après les recherches de Hilbert, la mécanique quantique a trouvé que les observables d'un système physique sont représentés par les opérateurs linéaires symétriques d'un espace de Hilbert ; et que les valeurs propres et vecteurs propres de cet opérateur (qui représente l'énergie) sont les niveaux d'énergie et les états quantiques stationnaires du système qui leur correspondent. Evidemment, cette interprétation en mécanique quantique a accru l'intérêt à l'égard de cette théorie et a conduit à une étude plus scrupuleuse de celle-ci, aboutissant à de nombreuses simplifications et extensions.[34]

C'est en référence à de telles anticipations des mathématiques pures sur la réalité physique que les mathématiciens de Göttingen adoptaient la « posture réaliste » que nous avons illustrée dans les précédents paragraphes. Cela explique le type d'attitude qu'adopte Hermann Weyl dans *La Géométrie infinitésimale pure* ou dans *Gravitation et expérience,* qui consiste à développer une nouvelle théorie de l'espace d'une façon purement spéculative, et de ne chercher qu'*après coup*, une validation auprès de l'expérience[35]. Cette approche est

[33] Après avoir cité le fameux texte de Riemann [Riemann 1854, 297] (cf. plus bas p139), Hermann Weyl ajoute :

> Dans les derniers mots [de sa citation], Riemann affirme clairement qu'il laisse le prolongement [de ses réflexions] entre les mains d'un continuateur qui aura un génie physique comparable à son génie mathématique. Après 70 ans, sa prophétie a été réalisée par Einstein.

Notre traduction de [RZM 1918, 91]:

> Die eigentliche Weiterführung hatte er aber mit den letzten Worten deutlich genug in die Hände eines nach ihm kommenden, seinem mathematischen ebenbürtigen physikalischen Genies gelegt. Nach 70 Jahren ist das von ihm Prophezeite durch Einstein in Erfüllung gegangen.

[34] Dans "A Half century of Mathematics", *The American Mathematical Monthly*, 1951, .p. 523-553, dans [Weyl, GA vol. IV, 464-482] Notre traduction, à partir de [Sigurdsson 1991, 8].

[35] On peut se demander si Albert Einstein lui-même n'a pas adopté ce type d'attitude pour produire ses théories de la relativité. Ce n'est pas le lieu pour traiter de ce problème en détail. C'est en tous cas un fait que le travail d'Einstein était hautement spéculatif et n'avait été motivé par aucune découverte expérimentale originale. Il faut cependant noter que le travail spéculatif d'Albert Einstein était centré aussi bien sur des considérations physiques qu'il élaborait grâce à des expériences de pensée (travail sur la notion de mesure, de simultanéité…) que sur des motifs spécifiquement mathématique (recherche d'harmonie, de symétrie, d'unification par généralisation…)

David Hilbert verra dans le travail accompli par Einstein dans sa théorie de la relativité générale l'exemple le plus éclatant de la fertilité de la méthode spéculative :

caractéristique de penseurs comme Hermann Weyl, David Hilbert ou Hermann Minkowski qui, pour le dire rapidement, étaient des mathématiciens intéressés aux problèmes physiques et non pas des physiciens qui ne se seraient intéressés aux mathématiques que pour des raisons pragmatiques, afin d'y trouver de simples outils efficaces.

Notre travail à suivre sur la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl montrera cependant que ce n'est pas uniquement en tant que mathématicien qu'Hermann Weyl croit en une possibilité de contribuer à l'avancée de la physique par la spéculation mais aussi en tant que philosophe (sans préjuger ici du fait qu'Hermann Weyl serait lui même créateur d'innovations philosophiques ou seulement l'héritier de pensées philosophiques). Nous verrons en fait que les mathématiques sont susceptibles d'être le mode d'expression de considérations *a priori* qui ont une portée épistémique, fondatrice de l'objectivité du savoir physique.

Si l'anticipation des mathématiques sur les découvertes physiques explique la « posture réaliste » des penseurs de Göttingen, elle est cependant difficilement justifiable épistémologiquement. Elle est la plupart du temps simplement *constatée*. Les auteurs de cette époque exprimaient de différentes façons ce constat. Certains auteurs attribuaient à la nature elle-même les caractéristiques qui guident le travail du mathématicien pur. La nature est harmonieuse, simple et unifiée ; c'est pourquoi le mathématicien peut anticiper ses structures. Parfois, ces caractères d'harmonie, de simplicité et d'unité, que nous aurions tendance spontanément à considérer comme des réquisits de notre esprit, étaient en quelque sorte hypostasiés en renvoyant à l'idée d'un Dieu ordonnateur ou à l'idée d'un « plan » du Cosmos. Cette façon de s'exprimer est particulièrement claire chez Albert Einstein, dans sa période de maturité, et de façon plus anecdotique chez Hermann Weyl[36].

> « Selon mon opinion, la découverte par Einstein des équations de la gravitation représente le style de pensée pure (Gedanken-Art) le plus puissant de l'esprit humain. Mais le mathématicien qui, bien souvent, note déjà avec étonnement l'harmonie préétablie entre ses pensées et la réalité, est presque obligé d'adopter l'idée (Vorstellung) que la nature est arrangée de telle sorte que, pour la comprendre, la spéculation mathématique la plus profonde est requise. »

Ce texte est extrait de « Natur und mathematisches Erkennen », exposé donné à Copenhague en mars 1921, p15-16, *Nachlaß David Hilbert, Niedersäcshische Staatsund Universitätsbibliothek*, Göttingen. Notre traduction à partir [Sigurdsson 1991, 70].

[36] Hermann Weyl termine la quatrième édition d'*Espace, Temps, Matière* en décrivant ce que devrait ressentir tout observateur avisé des avancées récentes de la science :

> « Il [Celui qui a parcouru l'histoire du concept d'espace depuis Euclide jusqu'au champ métrique dynamique et à la géométrie infinitésimale] devrait être pénétré par la certitude que notre raison n'est pas seulement un échappatoire humain, trop humain, devant la lutte pour l'existence, mais qu'elle se hisse au niveau de la raison du monde [Weltvernunft], en dépit de toutes les erreurs et de toutes les opacités, et [par la certitude] que la conscience de chacun d'entre-nous en vient à être le lieu où l'unique lumière et vie de la Vérité se

Enfin, une des façons les plus courantes à cette époque, pour exprimer ce caractère d'anticipation des mathématiques sur la réalité physique, consistait à utiliser l'expression, d'inspiration leibnizienne[37], d'une *« harmonie préétablie entre la nature physique et l'esprit mathématique »*. On trouve des expressions similaires aussi bien chez des mathématiciens[38] comme Hermann Weyl, Hermann Minkowski ou David Hilbert que chez des physiciens comme Albert Einstein ou Max Planck. Nous renvoyons avec Skuli Sigurdsson à l'article de Lewis Pyenson pour une étude approfondie des usages de cette expression dans l'Allemagne de cette époque[39].

Toutes ces façons de s'exprimer ne doivent cependant pas nous tromper. Qualifier la nature d'« harmonieuse », de « simple », d'« unifiée », affirmer qu'elle se déroule selon un plan organisateur, voire un plan divin, ou encore parler d'une harmonie préétablie entre l'esprit mathématique et la nature physique ne résout pas le problème. Ce n'est qu'une manière de désigner le véritable problème épistémologique du pouvoir anticipateur des mathématiques pures sur la réalité physique.

> saisit elle-même à travers le phénomène. Quelques-uns des accords fondamentaux de cette harmonie des sphères, auxquels rêvaient Pythagore et Kepler, sont parvenus à nos oreilles. »

Notre traduction. [RZM 1921, 284] :

> „[…]er muß durchdrungen werden von der Gewißheit, daß unsere Vernunft nicht bloß ein menschlicher, allzumenschlicher Notbehelf im Kampf des Daseins, sondern ungeachtet aller Trübungen und alles Irrtums doch der Weltvernunft gewachsen ist und das Bewußtsein eines jeden von uns der Ort, wo das Eine Licht und Leben der Wahrheit sich selbst in der Erscheinung ergreift. Ein paar Grundakkorde jener Harmonie der
>
> Sphären sind in unser Ohr gefallen, von der Pythagoras und Kepler träumten."

Derrière le lyrisme du texte de Weyl, on perçoit le rationalisme qui l'anime, rationalisme qu'il exprime par la référence à Pythagore et Kepler. Le vocabulaire employé fait ici de la raison un être transcendant la condition humaine, une « raison du monde ». Pris au pied de la lettre, ce texte semble expliquer l'adéquation de la démarche scientifique par une explication réaliste naïve, une simple corrélation entre la raison humaine et la raison du monde.

[37] La notion d'« harmonie préétablie » a été introduite par Gottfried Wilhelm Leibniz pour répondre au problème de l'union de l'âme et du corps. Il illustre souvent cette idée par l'image de deux horloges similaires qui fonctionnent de concert sans qu'il soit nécessaire qu'il y ait une quelconque communication entre les deux. Leibniz a ensuite exporté cette notion pour traiter d'autres problèmes. Il l'a appliqué à l'ensemble des monades physiques et s'en est même servi à un usage proche de celui qu'ont voit à l'œuvre ici dans le cadre de Göttingen, en parlant d'harmonie préétablie entre la sphère mathématique des idées éternelles et le monde physique. C'est Lewis Pyenson qui a porté l'attention des historiens et philosophes des sciences sur cette expression et son utilisation dans le contexte de la science allemande de la période de la république de Weimar. Cf. [Pyenson 1982, 138-139] Ce travail de Pyenson est partiellement rapporté dans le texte de Sigurdsson.

[38] Skuli Sigurdsson donne les références pour les auteurs qui suivent. Pour Hermann Weyl : Cf. le texte cité deux pages en arrière. Pour Hermann Minkowski : [Sigurdsson, 1991, 9-10]. Pour David Hilbert : [Hilbert 1900, 3], mais aussi de façon plus nette dans l'autre texte que nous avons cité dans notre note 35(p35). Pour Albert Einstein : [Sigurdsson 1991, 71]. Enfin, pour Max Planck : [Sigurdsson 1991, 13]

[39] Cf. [Pyenson, 1982]

Retenons finalement sur ce point que le cadre intellectuel dans lequel s'est développé l'esprit d'Hermann Weyl était propice à la réflexion sur les rapports entre mathématiques et physique même si cette harmonie préétablie constatée entre la sphère mathématique et la nature physique, qui soutenait la « posture réaliste », c'est-à-dire le type d'approche hautement spéculative de Göttingen, était en attente d'une véritable justification épistémologique.

d. La théorie de la relativité et l'école de Göttingen

Disons quelques mots sur la façon dont la théorie de la relativité avait été reçue par le cercle des penseurs de Göttingen. Nous allons voir que ces auteurs avaient considéré cette théorie comme le terrain le plus propice à l'application de leur approche spéculative de la physique. Nous suivons toujours, pour l'instant, le travail de Skuli Sigurdsson.

On remarque dans les années 1905-1925 une confluence d'intérêts remarquable à Göttingen autour de la théorie de la relativité. Hermann Minkowski avait fortement contribué à éveiller cet engouement pour la théorie par son interprétation géométrique de la théorie de la relativité restreinte dans son très célèbre cours *Espace et temps* de 1908[40]. Quant à la relativité générale, non seulement David Hilbert, Felix Klein et Hermann Weyl y ont travaillé de façon sérieuse[41], mais on pourrait multiplier les exemples de savants à Göttingen qui ont apporté une contribution importante[42]. Selon Skuli Sigurdsson, l'histoire des sciences nous donnerait sans doute peu d'exemples, jusqu'à cette période, de milieu intellectuel dans lequel autant de chercheurs étaient au travail sur un même sujet.

Cette confluence d'intérêts peut s'expliquer sans doute parce que, d'une part, la théorie de la relativité générale était le cadre idéal pour mettre en application la posture réaliste dont nous avons traité plus haut et parce que, d'autre part, cette théorie se place en continuité directe avec le programme de géométrisation de la physique initié à Göttingen par Bernhard Riemann. Développons successivement ces deux explications.

Premièrement, dans aucun domaine de la physique plus que dans celui de l'étude de l'espace-temps dans ses relations aux forces fondamentales, les mathématiques ne

[40] [Minkowski, 1908]

[41] Le principal texte de Hilbert sur ce thème est [Hilbert 1916]. Pour les références de Klein, cf. [Sigurdsson 1991, 135].

[42] Skuli Sigurdsson évoque les travaux de: Ervin Finlay Freundlich, Karl Schwarzschild, Arnold Sommerfeld, Max Abraham et Emil Wiechert. Cf. [Sigurdsson 1991, 90-91]

semblent capturer l'essence même de la réalité et non pas fournir de simples modèles simplificateurs, simples outils d'une approximation lointaine de la réalité, comme c'est le cas pour les domaines physiques moins fondamentaux (par exemple : l'hydrodynamique, la thermodynamique ou la mécanique du solide). Dans la théorie de l'espace-temps, les constructions mathématiques semblent capturer adéquatement certaines structures réelles du monde[43].

Deuxièmement, en plus d'être un domaine de la physique efficacement mathématisé, la théorie de la relativité intéressait les membres du cercle de Göttingen en tant qu'elle était un premier pas vers une unification du domaine de la physique, par le biais de la géométrie. L'approche d'Albert Einstein dans l'article de 1905, *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*[44] qui a donné naissance à la théorie de la relativité restreinte, n'était pas d'emblée géométrique. Il est remarquable que l'intérêt de la communauté de Göttingen pour cette théorie coïncide avec l'exposé de Minkowski, « Espace et Temps », qui a introduit l'interprétation géométrique de cette théorie et lui a donné une forme davantage mathématisée. En ce qui concerne la théorie de la relativité générale, celle-ci est d'emblée géométrique. Elle est une confirmation éclatante de l'idée de Bernhard Riemann que la notion mathématique d'espace métrique est partiellement indéterminée et que le réel physique contenu dans l'espace doit être à l'origine de sa détermination géométrique. Si les mathématiques portent bien en elles la capacité à unifier la physique, comme le souhaitaient les penseurs de Göttingen, c'était sans aucun doute par le biais de la géométrie et de la notion d'espace. Cette idée était non seulement en continuité avec la pensée de Bernhard Riemann mais elle permettait aussi à Felix Klein de mettre à l'épreuve les thèses qu'il avait avancées avec Sophus Lie sur la nature de la géométrie dans son fameux programme d'Erlangen[45]. Enfin, la théorie de la relativité générale, après la restreinte, renforçait l'importance de la considération des invariants physiques vis-à-vis de certains groupes de transformations. Cet aspect de la théorie permettait aussi aux algébristes, comme Emmy Noether et ses collaborateurs, d'apporter leur contribution à ce travail de la communauté de Göttingen sur la théorie de la relativité.

---

[43] Peter Galison a exhibé un brouillon de [Minkowski 1908] où l'auteur développe une remarque qui va dans ce sens à propos du cas limité de la théorie de la relativité restreinte et de l'électrodynamique :

> « La théorie électrique semble, plus qu'aucune autre branche de la physique, être prédisposée pour le triomphe des mathématiques pures. Dans le monde du pur éther, les structures mathématiques les plus ténues semblent atteindre complètement la réalité, tandis que, partout ailleurs (pensons par exemple à l'hydrodynamique), la formulation mathématique et les problèmes montrent qu'ils ne sont qu'une approximation distante et idéalisée de la réalité brute. »

Notre traduction à partir de [Sigurdsson 1991, 16].

[44] [Einstein, 1905]

[45] [Klein 1892]

2. Hermann Weyl et la philosophie

Notre partie I.1. a esquissé comment l'école Göttingen a pu influencer la conception qu'Hermann Weyl s'est faite des mathématiques et de leurs rapports avec la physique. Une détermination complète du contexte intellectuel de naissance de la pensée d'Hermann Weyl sur l'espace-temps, ce qui n'est pas notre objet, devrait aussi aborder la façon dont son insertion à l'E.T.H. de Zurich à partir de 1913 lui a permis d'être en contact avec d'autres scientifiques ayant une vision de la science différente. Il faut retenir en particulier sa rencontre avec Albert Einstein qui reste à l'E.T.H. jusqu'à l'été 1915, quelques mois avant l'achèvement de sa théorie. Cette rencontre a pu favoriser l'attention de Weyl pour la théorie de la relativité, quoique les échanges entre les deux penseurs n'aient véritablement commencé qu'après[46]. Au vu de l'approche qui est la sienne dans *Espace-Temps-Matière*, et de ses références, on peut cependant affirmer que l'influence de Göttingen est prépondérante dans la vision qu'Hermann Weyl développe des rapports entre physique, mathématiques et géométrie.

a. Ses sources philosophiques de l'enfance à la période de Zurich

Son insertion à Zurich a été peut-être plus déterminante en ce qui concerne les *sources philosophiques* qui seront les siennes. Son intérêt pour la philosophie avait débuté avant même son entrée à l'université lorsqu'il lisait un commentaire de la *Critique de la raison pure* d'Immanuel Kant, comme il le relate dans un opuscule[47]. Il avait ainsi reçu tôt le

---

[46] Cf. [Scholz 1994, 203-204]

[47][Weyl 1954] dans [GA, 632-633]:

> « J'ai à jamais gravé dans ma mémoire, le souvenir suivant. Etant resté dans la maison de mes parents, alors que j'étais encore dans mon avant-dernière année scolaire, je tombai sur une copie d'un court commentaire daté de l'année 1790 à la *Critique de la raison pure* de Kant. C'est à partir de là que je connus la doctrine kantienne de l'idéalité de l'espace et du temps qui me saisit immédiatement par sa puissance : je m'étais réveillé dans une secousse de mon sommeil dogmatique, le monde se trouvait mis en question d'une manière radicale.[…] La façon dont Kant s'appuie sur la géométrie euclidienne me semble naïve à présent. L'édifice

goût pour la philosophie et en particulier pour celle d'Immanuel Kant, largement diffusée dans le milieu allemand de cette époque, ainsi que pour l'idéalisme allemand en général. Pendant sa période à Zürich, il complète sa connaissance de la philosophie. Quand il a son premier poste à l'E.T.H., Hermann Weyl est en contact avec le professeur de philosophie Fritz Medicus qui l'incite à s'intéresser à la philosophie de Johann Gottlieb Fichte[48]. Weyl participe alors à un groupe de lecture sur Fichte et annote la plupart des grands ouvrages du philosophe. Sa connaissance de la philosophie de Husserl, dont il avait suivi quelques cours à Göttingen, est peut-être complétée grâce aux discussions avec sa femme Helene Weyl, spécialiste de phénoménologie qui avait suivi assidument les cours d'Husserl, et grâce aux contacts entre Hermann Weyl et Oscar Becker, étudiant modèle de Husserl qui appliquait l'approche phénoménologique à la philosophie des mathématiques[49]. Enfin, Hermann Weyl s'intéressera aussi à la pensée de Maître Eckhart et se mettra à la lecture de quelques écrits leibniziens lorsqu'il entreprendra l'écriture de son grand ouvrage philosophique, la *Philosophie des mathématiques et des sciences naturelles*. Tout ceci participe de son orientation philosophique.

> de la philosophie de Kant, que j'avais adopté avec un cœur confiant, s'est effondré suite à cette énorme collision [avec la théorie de la relativité]

Traduction Alain Michel de :

> Für immer ist mir in Erinnerung geblieben, wie ich noch als Schüler im vorletzen Schuljahr auf dem Bodenraum meines elterlichen Hauses ein stockfleckiges, aus dem Bodenraum meines elterlichen Hauses ein stockfleckiges, aus dem Jahre 1790 stammendes Exemplar eines kurzen Kommentars zu Kants „Kritik der reinen Vernunft" aufstöberte. Hieraus lernte ich Kants Lehre von der *Idealität von Raum und Zeit* kennen, die mich sofort aufs mächtigste ergriff: mit einem Ruck war ich aus dem „dogmatischen Schlummer" erwacht, war dem Geist des Knaben auf radikale Weise die Welt in Frage gestellt. […] Kants Bindung an die euklidische Geometrie erschien nun als naiv. Unter diesem überwältigenden Anstoß stürzte mir das Gebäude der Kantischen Philosophie, der ich mit gläubigen Herzen ergeben gewesen war, zusammen.

[48] Dans [Sieroka 2008, 2], Norman Sieroka renvoie au texte d'Hermann Weyl "Lecture at the Bicentennial Conference", dans *Nachlaß Hermann Weyl*, E.T.H. Archives, Zürich. Dans ce texte, Weyl exprime à quel point il était impliqué pendant cette période dans la pensée de Fichte. Cf. aussi les preuves biographiques apportées dans [Sieroka 2006, 3-6] Skuli Sigurdsson traite de l'amitié et du respect qu'avaient respectivement l'un pour l'autre Weyl et Medicus : [Sigurdsson 1991, 221-222].

[49] La présence d'Hermann Weyl à quelques cours de Husserl est relatée dans [Sieroka 2008, 2]. Pour les débats sur le rôle qu'aurait joué Helene Weyl sur son mari quant à son intérêt pour la philosophie de Husserl, quelques références sont données dans [Sigurdsson 1991, 201] Les rapports d'Hermann Weyl à Oscar Becker sont connus. C'est Husserl lui-même qui avait introduit son étudiant auprès d'Hermann Weyl. Cf. [Ryckman&Mancosu, 135]. Il lisait ses écrits, échangeait avec lui par correspondance et l'avait même rencontré. Cf. sur ce point [Sieroka 2008, 5] et les références à Becker données dans la bibliographie de son article.

b. Un intérêt pour la philosophie intrinsèque à la pratique de la science

Hermann Weyl nous ayant laissé très peu de textes où il thématise sa compréhension des rapports généraux entre sciences et philosophie[50], il n'y a guère qu'une lecture globale de ses grands ouvrages qui permette de s'en faire une idée correcte. Il est cependant clair que l'intérêt que porte Hermann Weyl pour la philosophie n'est pas une occupation secondaire qu'il aurait en dehors de son travail scientifique. Il est remarquable que son activité scientifique s'accomplisse dans un dialogue avec la philosophie, comme le prouvent ses écrits au style si particulier, mêlant inextricablement l'exposition de théories physiques et de notions mathématiques, la démonstration de théorèmes, l'appel à l'histoire des idées et des sciences, et le recours à la réflexion philosophique. Si cette intrication entre sciences et philosophie est fortement marquée chez cet auteur, elle n'est pas exceptionnelle à l'époque. De nombreux scientifiques contemporains d'Hermann Weyl comme Albert Einstein, Max Planck ou Niels Bohr, pratiquent également la science dans un dialogue avec les problématiques philosophiques. Le mouvement d'émancipation de la science à l'égard de la philosophie, ou du moins de séparation en deux traditions de pensée bien distinctes, mouvement initié au siècle des lumières, était dans un état moins avancé à cette époque que de nos jours, en ce début de XXIème siècle.

Notre présentation des rapports d'Hermann Weyl à la philosophie se fera en trois temps. Nous présenterons d'abord d'une façon générale la position générale d'Hermann Weyl à propos des relations entre science et philosophie, telle qu'elle peut être reconstruite à partir des grands textes scientifiques de Weyl de la période 1917-1923. Puis, à l'aide des travaux de Norman Sieroka, Paolo Mancosu et Thomas Ryckman, nous expliquerons comment Hermann Weyl a puisé dans son rapport à des auteurs philosophes comme Edmund Husserl ou Johann Gottlieb Fichte, l'idée générale qu'il se fait des rapports entre les sciences et la philosophie, ces auteurs lui fournissant des « heuristiques », i.e. des fils directeurs pour sa recherche scientifique. Enfin, nous caractériserons en dernier lieu la manière dont certains résultats philosophiques se dégagent du travail même d'Hermann Weyl. Nous verrons ainsi que la philosophie n'est pas pour lui seulement une discipline auxiliaire qui lui donne des intuitions directrices générales. Hermann Weyl, à l'intérieur même de son travail scientifique, est producteur d'idées et de positions philosophiques originales concernant la théorie de la connaissance et l'ontologie de l'espace-temps et de la matière.

[50] Seuls deux textes d'*Espace-Temps-Matière* abordent de façon thématique la façon dont Hermann Weyl conçoit les rapports entre la philosophie, les sciences, et leurs histoires respectives. Ces textes étaient trop longs pour figurer ici en note de bas de page. Nous fournissons une traduction et un commentaire rapide de ces textes dans l'annexe I.4.

Commençons par le premier point. Le dialogue entre sciences et philosophie constitue pour Hermann Weyl une alternative à une philosophie spéculative hâtive. Pour lui, de fait, la science n'est pas soumise à la philosophie, puisqu'elle peut suivre ses propres démarches de manière indépendante et justifiée sans avoir à attendre de la part de la philosophie une théorie de la connaissance parfaitement construite préalablement. Dans plusieurs textes[51], Hermann Weyl suggère, certes, que cet état de fait n'est peut être que provisoire, dû au fait que la philosophie n'a pas pour le moment atteint quelque chose de stable et de définitif. Cependant, en attendant un éventuel état mature de la pensée philosophique, Hermann Weyl prend acte de l'indépendance que les sciences physiques ont acquise vis-à-vis de la philosophie (pour ce qui est des mathématiques, elles en ont toujours été largement indépendantes). La pratique scientifique peut ainsi précéder la réflexion philosophique à son sujet. Hermann Weyl voit dans la figure du métaphysicien, tentant de répondre aux questions ontologiques et épistémologiques concernant l'espace et le temps sans le recours aux découvertes scientifiques, un savant impatient qui rate son objet[52] ; non pas parce qu'il aurait fondamentalement tort en voulant faire jouer un rôle fondamental à la raison pure dans l'élaboration du concept d'espace, mais parce que les composantes *a priori* de la notion d'espace ne nous sont pas immédiatement découvertes par une introspection précipitée. Elles ont besoin de la lente maturation d'une analyse fournie par le développement scientifique qui s'inscrit dans l'histoire.

Cette méfiance d'Hermann Weyl à l'égard du métaphysicien ne signifie pas pour autant que l'avancée de la science n'ait rien à voir avec les problèmes philosophiques. Les questions traitées par la science physique fondamentale, avant tout la question de l'analyse du concept d'espace-temps, et l'interrogation sur la nature de la matière et de ses relations à l'espace-temps, font échos à des problématiques philosophiques ontologiques particulières. En outre, les constructions des théories scientifiques qui répondent à ces questions sont autant d'occasions de répondre à certaines problématiques ponctuelles de théorie de la connaissance. Cependant, ces problèmes ne sont pas des difficultés préalables qui pourraient être résolues en amont de façon purement spéculative, comme un préliminaire à la science. C'est au contraire dans le dialogue avec la science, ses démarches et ses découvertes fondamentales, qu'Hermann Weyl voit se dessiner des avancées majeures concernant les problématiques philosophiques.

Cependant, il ne faut pas pour autant penser, qu'au contraire de l'hypothèse réfutée ci-dessus, la philosophie soit conçue par Hermann Weyl comme une servante de la science ou comme une discipline réduite à la réinterprétation des résultats scientifiques. Il répète en

[51] [RZM 1919, 2] [Weyl 1918a, iii-iv]

[52] [Weyl 1923b, 1-2]

effet inlassablement qu'en dernier lieu, toute la démarche scientifique devrait être soutenue par une théorie de la connaissance systématique ayant des exigences et des méthodes bien établies, même si, conformément à ce que nous avons dit, cette théorie se serait dégagée progressivement par un dialogue avec la science qui s'inscrit dans l'histoire de la pensée. De plus, Hermann Weyl montre que les problématiques ponctuelles auxquelles s'intéresse la science ne touchent toujours qu'à une part incomplète de toutes les problématiques philosophiques. Les questionnements, notions et démarches philosophiques débordent toujours ce qui est véritablement abordé au sein même de la pratique scientifique. Cela explique qu'Hermann Weyl, quand il est amené à développer des problématiques philosophiques en rapport avec son travail scientifique, fait appel à des démarches extérieures à la pratique scientifique habituelle comme la phénoménologie de la perception, la distinction entre diverses sources de la connaissance (expérience, raison…), ou enfin le recours à l'histoire des sciences et à l'histoire de la philosophie. On peut illustrer le débordement du philosophique sur le scientifique par l'exemple de la distinction par Weyl entre un problème *mathématique* et un problème *philosophique* de l'espace qu'Hermann Weyl thématise dans les premières pages de son *Analyse mathématique du problème de l'espace*[53]. Cette distinction suggère que la science ne touche qu'à une part incomplète des problématiques concernant cette notion.

La philosophie doit donc appuyer la démarche scientifique, non pas à la façon d'une pièce rapportée qui contraindrait l'avancée scientifique de l'extérieur, mais comme une composante essentielle, partiellement interne à la science. Hermann Weyl s'excuse pourtant à de nombreuses reprises du trop peu de philosophie que peuvent contenir ses œuvres par rapport à ce que la raison demanderait[54]. Face au caractère fortement inachevé de l'état de la connaissance philosophique, il dit devoir privilégier avant tout les aspects scientifiques de son travail. Pourtant, la philosophie est présente en quasi permanence.

Ce double langage, nécessité d'une théorie de la connaissance mais retard systématique de la philosophie sur la science, s'explique par une différence de temporalité entre ces deux disciplines. Au début de « La fonction de l'histoire dans la pensée mathématique d'Hermann Weyl »[55], Alain Michel relève chez Hermann Weyl un décalage permanent entre les rapports que *devraient* entretenir la philosophie et la science idéalement, sans doute dans une optique husserlienne, et les rapports *réels* qu'ils entretiennent compte tenu de ce qu'Hermann Weyl appelle le « point de vue de la nature

[53] [Weyl 1923, 1-2]

[54] Cf. les références de la note 51.

[55] [Michel 2006, 211-217]

humaine »[56]. L'histoire des sciences vient pallier une défaillance de la nature humaine. En effet, une théorie de la connaissance doit identifier puis analyser quelle part dans la connaissance de la nature revient à l'expérience et quelle part revient à des considérations *a priori*[57]. Etant donné que, par définition, la partie *a priori* de la connaissance répond à des exigences intrinsèques à la raison, la théorie de la connaissance devrait alors idéalement pouvoir être établie avant toute expérience, avant toute pratique scientifique. Dans les faits, note Hermann Weyl, on est incapable de faire la démarcation entre les principes *a priori* de la connaissance et son contenu empirique par un simple retour réflexif sur soi, par une philosophie spéculative coupée du contenu de la science. En voulant atteindre la théorie de la connaissance directement de façon spéculative, le métaphysicien est trop hâtif. C'est un leitmotiv de la pensée d'Hermann Weyl déjà entrevu. A cette philosophie spéculative hâtive du métaphysicien, Hermann Weyl oppose une réflexion philosophique interne au mouvement de la science qui avance prudemment, en adéquation avec le caractère limité de la nature humaine. Ainsi, si Hermann Weyl insiste sur l'existence de principes *a priori* qui guident la connaissance humaine, il insiste tout autant sur le fait que ces principes ne sont découverts que depuis l'intérieur de la science, *à l'occasion* de leur applications à des problèmes concrets. L'histoire des sciences et de la philosophie remplacent pertinemment l'établissement spéculatif de la théorie de la connaissance.

c. L'idéalisme allemand fournit à Hermann Weyl des « heuristiques »

Une fois posé ce dialogue sans subordination entre la philosophie et les sciences, nous devons préciser quel est le type de problématiques philosophiques auquel Hermann Weyl entend répondre depuis l'intérieur de son travail scientifique. Nous allons voir qu'Hermann Weyl a pensé les rapports généraux entre sciences et philosophie et aussi les problématiques philosophiques particulières qui guident la science, non seulement à partir de son expérience personnelle, mais aussi par l'intermédiaire de sa connaissance des philosophes allemands comme Edmund Husserl, Johann Gottlieb Fichte, ou Gottfried Wilhelm Leibniz. Précisons tout de suite qu'Hermann Weyl n'est pas un *commentateur*, au sens académique du terme, ni de Husserl, ni de Fichte, ni d'aucun autre philosophe d'ailleurs[58]. S'il cite ponctuellement ces auteurs pour justifier sa propre analyse philosophique des concepts de la science, il ne réexpose cependant jamais ni ne critique le système philosophique complet de chacun d'entre eux. Souvent, il se contente de donner une courte citation ou référence et d'affirmer son adhésion à certains de leurs points de vue. Si l'influence de ces auteurs sur la pensée d'Hermann Weyl est indéniable, ce n'est

[56] [Weyl 1921, 133-134] Le texte figure dans notre annexe I.4.

[57] [Weyl 1923b, 1-2]

[58] Norman Sieroka est d'accord avec nous sur ce point. Cf. [Sieroka 2008, 9]

cependant pas au sens où le travail d'Hermann Weyl serait une application des philosophies de ces auteurs aux nouveaux domaines scientifiques ouverts au début du vingtième siècle, pour autant qu'une telle « application » ait un sens. Il y a au moins deux bonnes raisons pour refuser une telle interprétation des rapports d'Hermann Weyl à la philosophie.

Premièrement, son rapport avec ces auteurs n'est jamais celui d'un lecteur fidèle qui voudrait assimiler un système philosophique dans son unité organique pour pouvoir ensuite en vérifier la pertinence pour la construction scientifique. La juxtaposition même de ces auteurs aux positions souvent inconciliables témoigne du fait qu'Hermann Weyl ne souhaite adhérer à aucun système philosophique préconstruit, conformément à sa vision dynamique des rapports entre sciences et philosophie. Ainsi, plutôt que de faire sien un quelconque système philosophique, Hermann Weyl tire bien plutôt de ces auteurs des idées isolées, des intuitions directrices pour son propre travail, ce qu'on peut appeler des « heuristiques ». Il est d'ailleurs remarquable que, conformément à l'usage qu'il fait de ces auteurs, Hermann Weyl n'apporte apparemment pas une grande importance à la fidélité des interprétations qu'il reçoit de leurs pensées. Il fait ainsi facilement siennes les interprétations qu'il tire de ses fréquentations philosophiques ou de la vulgate philosophique de son époque[59]. Nous renvoyons aux articles de Norman Sieroka qui montrent que ce n'était pas n'importe quel Fichte qui influençait Weyl, mais le « Fichte de Zürich », c'est-à-dire Fichte tel qu'il était lu et interprété dans les milieux philosophiques de Zürich, notamment par son collègue philosophe Fritz Medicus[60]. De plus, Norman Sieroka montre qu'Hermann Weyl se forge une certaine compréhension par contraste des philosophies de Fichte et de Husserl dans laquelle on peut apercevoir l'influence de l'école néokantienne de Marbourg[61].

Deuxièmement, adhérer à un quelconque système philosophique, préalablement à l'analyse de la science, serait une démarche peut conforme au type d'approche prudente interne à la science que se propose Hermann Weyl. Ces deux points confirment bien que les philosophies de Husserl et de Fichte, qui ont le plus influencé notre auteur pendant cette période, ont seulement joué vis-à-vis de sa pensée le rôle d'« heuristiques », c'est-à-dire de schémas de pensée généraux dont il s'inspire au moment où il construit sa propre approche de la philosophie en interaction avec les théories scientifiques.

Quelles sont alors ces heuristiques ? Elles concernent avant tout la façon dont Hermann Weyl conçoit la nature des problèmes de la théorie de la connaissance et la façon

---

[59] On verra ainsi plus bas (p95) qu'Hermann Weyl a une lecture psychologisante de la philosophie de Kant qui était sans doute véhiculée par la vulgate de l'époque.

[60] [Sieroka 2006]

[61] [Sieroka 2008a], [Sieroka 2008b]

dont il entend les résoudre au sein de son travail scientifique. Hermann Weyl formule la problématique centrale de la théorie de la connaissance dans les termes d'une délimitation au sein de la connaissance de ce qui provient de l'expérience et de ce qui provient de considérations *a priori*[62]. Hermann Weyl retient en effet de l'idéalisme allemand l'idée que toute connaissance est le fruit d'une interaction entre un apport empirique, corrélat de la confrontation concrète avec la réalité extérieure appréhendée, et certaines composantes *a priori* qui reflètent la nature du sujet connaissant et de son mode de rapport au monde.

Il faut faire attention ici au fait que nous retranscrivons les idées de Weyl dans le vocabulaire usuel de l'idéalisme qui place au cœur de la terminologie une certaine notion de sujet : le sujet transcendantal. Il est cependant remarquable que, même s'ils regorgent de références à des exigences *a priori* de la raison qui fondent le caractère nécessaire de certains éléments de la connaissance, et même s'ils sont indéniablement influencés par l'idéalisme allemand, les grands textes d'Hermann Weyl ne font aucune référence à une telle notion d'un sujet transcendantal. La notion de sujet [Subjekt] est réservée chez Hermann Weyl à un tout autre usage que nous étudierons en détail ci-dessous, qui correspond à l'idée d'un point de vue sur le monde, individuel, localisé et arbitraire, qu'il s'agit de neutraliser pour atteindre l'objectivité. Le résultat de cette absence d'une notion de sujet transcendantal est qu'on ne sait pas *à qui* (si ce n'est à la raison [Vernunft] elle-même) attribuer ces exigences *a priori* qui interviennent dans l'épistémologie de Weyl.

N'ayant à notre disposition aucun texte où Hermann Weyl prendrait directement position sur la notion du sujet transcendantal, ou bien expliquerait son absence dans ses propres textes, a contrario des autres thèmes principaux de l'idéalisme, nous en sommes réduit à des hypothèses. Sans doute cette disparition de la notion de sujet transcendantal dans les écrits de Weyl est-elle le résultat croisé de sa volonté d'insister sur une autre dimension du sujet (le sujet comme sujet-coordonnées) et de sa volonté de se démarquer de la philosophie kantienne et de certains aspects de la philosophie de Husserl. Toujours en raison de cette absence du sujet transcendantal dans les écrits d'Hermann Weyl, il faut user avec précaution de l'étiquette d'« idéalisme transcendantal » qu'a choisie Thomas Ryckman dans son livre[63] pour qualifier la famille de pensée à laquelle appartient Hermann Weyl.

---

[62] Hermann Weyl montre les enjeux de la théorie de la connaissance sur l'exemple particulier de son application au problème de l'espace dans [Weyl 1923, 2-3] Hermann Weyl n'est pas une personne utilisant de manière systématique un vocabulaire technique figé. Ce que nous avons désigné ici sous le terme des « composantes *a priori* » du savoir est parfois désigné par Weyl sous le terme des composantes « essentielles » [Wesentlich] (en référence sans doute à la philosophie husserlienne) ou de ce qui fait la nécessité [Notwendigkeit] de tel ou tel élément de connaissance.

[63] [Ryckman 2001, 6]

d. Les éléments *a priori* de la connaissance dans *Espace-Temps-Matière*

Bien que la perspective d'Hermann Weyl sur la théorie de la connaissance s'inscrive dans le vaste mouvement ouvert par l'idéalisme allemand, il n'est pas véritablement possible d'associer à ces idées un auteur philosophe particulier. En effet, dans les écrits d'Hermann Weyl, le terme « *a priori* » (ou ses substituts tels que présentés dans la note 62) revêt généralement un sens très large. Il ne s'agit pas toujours exactement du statut précis qu'Immanuel Kant ou d'autres philosophes allemands donnent à ce terme. Hermann Weyl range en général dans cette catégorie tous les éléments de connaissance internes à la théorie qui ne relèvent pas de la mesure expérimentale concrète[64].

Le terme d' « *a priori* » peut alors renvoyer effectivement à certains principes qui ont un sens proche de celui qu'on trouve dans la philosophie critique, c'est-à-dire d'un élément de connaissance qui est posé préalablement à toute expérience parce qu'il est une condition de possibilité de notre rapport objectif (inter-subjectif) au monde. Ce sens est clairement employé dans *Espace-Temps-Matière* à propos de l'homogénéité de l'espace ou de ses corrélats mathématico-physiques qu'Hermann Weyl appelle « principe de relativité de la mesure »[65] ou « principe de relativité de tout mouvement » [Prinzip der Relativität der Bewegung]. En effet, Hermann Weyl se rapporte à chacun de ces principes comme à une exigence que l'on doit poser pour « satisfaire la raison »[66], car cela rend possible le rapport

[64] Pour prendre un exemple, c'est en ce sens qu'Hermann Weyl affirme que les relations métriques, dans la théorie d'Einstein, ne sont plus des données *a priori*. Cela signifie qu'elles deviennent des grandeurs à mesurer :

> Une nouvelle étape physique est franchie pour la première fois lorsque la métrique spatio-temporelle [Weltmetrik] n'est plus donnée *a priori*, mais que la forme quadratique fondamentale en vient à être déterminée par la matière selon des lois généralement invariantes.

Notre traduction de [RZM 1919, 192-193] :

> Ein neues physikalisches Moment kommt erst durch die Annahme hinein, die Weltmetrik sei nicht *a priori* fest gegeben, sondern jene quadratische Grundform werde durch die Materie nach allgemein invarianten Gesetzen bestimmt.

[65] [RZM 1921, 8] Cf. plus bas, en II.3.a., notre analyse de la signification de ce principe chez Hermann Weyl.

[66] [RZM 1918, 193] :

> Ainsi, cette théorie [la théorie de la relativité générale], qui est une des preuves les plus importantes de la puissance de la pensée spéculative, en même temps que la solution au problème de la relativité de tout mouvement (seule solution capable de *satisfaire notre raison* [unsere Vernunft zu befriedigen]), nous apporte de surcroit la solution à l'énigme de la gravité.

Nous soulignons. Notre traduction de :

> So fällt uns durch diese Theorie, die eines der mächtigsten Zeugnisse für die Kraft spekulativen Denkens ist, mit der Lösung des Problems der Relativität aller Bewegung (einer Lösung, die allein imstande ist, unsere Vernunft zu befriedigen) zugleich die Lösung des Rätsels der Schwerkraft als eine reife Frucht mit in den Schoß.

de chaque sujet individuel à une même réalité géométrique ou physique objective. Le principe de relativité de la mesure a également un statut similaire. Ainsi, le principe de l'attribution par le sujet d'un système de coordonnées à l'espace est un tel élément *a priori*, condition de possibilité de notre rapport (scientifique) au monde[67].

Mais le terme « *a priori* » est souvent employé par Hermann Weyl dans un sens plus large qui comprend tout ce qui, au sein de la théorie mathématico-physique, a un statut principiel, c'est-à-dire n'est pas déduit mais est posé comme un point de départ. Ce sens recoupe l'*a priori* au sens strict développé au paragraphe précédent, mais aussi tous les concepts, quantités ou lois physiques fondamentales qui structurent l'ensemble de la théorie. C'est ainsi par exemple qu'en [RZM 1919, 283], Hermann Weyl parle du fait que sa nouvelle théorie d'unification de l'électromagnétisme avec la gravitation ne pose pas « *a priori* » le fonctionnement des règles et des horloges. Cela signifie ici simplement que ce fonctionnement n'est pas posé au départ de la théorie mais doit être dérivé des lois physiques. Avec une signification équivalente, en [RZM 1919, 175], Hermann Weyl affirme que la notion d'électron est donnée « *a priori* » dans la théorie de Maxwell contrairement à la théorie de Mie. L'électron dans cette dernière théorie a en effet un statut dérivé des lois physiques du champ. Ces deux exemples d'utilisation du terme « *a priori* » sortent bien du cadre des principes « *a priori* » au sens strict du terme développé ci-dessus.

Ainsi, l'important pour apercevoir la composante idéaliste de la pensée d'Hermann Weyl de l'espace(-temps), n'est pas de se focaliser sur sa terminologie[68], mais de prêter attention à la façon dont il essaie, au sein de la théorie, de délimiter le mathématique du physique. En effet, si les lois physiques fondamentales sont *a priori*, c'est en un sens lâche qui n'en fait pas des éléments nécessaires imposés par la raison pure, au contraire de ce qui advient dans la sphère mathématique qui semble reposer chez Hermann Weyl de tels principes *a priori* au sens strict. Quand il tente de délimiter si un certain élément de

---

[67] [RZM 1918, 193-194] :

> Seules les grandeurs physiques peuvent être mesurées, c'est-à-dire lues [sur un instrument de mesure] à partir des événements matériels, mais non pas les quatre coordonnées spatio-temporelles que nous attribuons *a priori* d'une manière arbitraire aux points de l'espace-temps pour pouvoir représenter les événements qui s'y déroulent par des fonctions mathématiques (de quatre variables indépendantes).

Notre traduction de :

> nur die physikalischen Zustandsgrößen können gemessen, d. h. aus materiellen Geschehnissen abgelesen werden, nicht aber die vier Weltkoordinaten, die vielmehr *a priori* in willkürlicher Weise den Weltpunkten zugeordnet werden, um die Darstellung der in der Welt ausgebreiteten Zustandsgrößen durch mathematische Funktionen (von vier unabhängigen Variablen) zu ermöglichen.

[68] Nous renvoyons de plus à notre paragraphe II.4.b. où nous expliquons que l'idéalisme d'Hermann Weyl est défendu dans une terminologie qui est renversée par rapport aux habitudes de l'idéalisme allemand.

connaissance doit être fixé au sein de la sphère mathématique, ou s'il doit être laissé indéterminé pour atteindre la théorie mathématique la plus générale possible, le critère d'Hermann Weyl semble être de voir si la raison seule peut donner des arguments susceptibles de fixer cet élément, préalablement à toute expérience. Nous allons l'illustrer ce fait en prenant deux exemples.

D'abord, l'exemple du nombre de dimensions de l'espace(-temps). Quand il traite dans *Espace-Temps-Matière*, de la notion de variété [Mannigfaltigkeit], ou de la notion d'espace vectoriel, Hermann Weyl insiste sur le fait que la dimension est un paramètre qu'on peut faire varier à volonté de manière parfaitement cohérente. Hermann Weyl prend des exemples, extérieurs à la notion d'espace, d'espaces vectoriels ou de variété de dimensions quelconques[69]. Cela montre que le facteur de la dimension de tels « espaces » est *mathématiquement* contingent. Il est alors naturel de développer une notion d'espace vectoriel (ou de variété) à un nombre indéterminé *n* de dimensions comme le montre son axiomatique. Cette recherche de généralité est même nécessaire pour développer de façon simple et harmonieuse les notions mathématiques, même dans le cas de l'application à l'espace :

> Pour saisir les lois de l'espace dans toute leur harmonie mathématique, nous devons nous abstraire du cas particulier de la dimension 3. Non seulement en géométrie, mais aussi d'une façon étonnante en physique, il est devenu de plus en plus manifeste qu'aussitôt que nous sommes parvenu à pénétrer complètement les lois de la nature qui gouvernent la réalité, nous trouvons alors qu'elles peuvent être exprimées par des relations mathématiques dont la simplicité est la plus transparente et l'harmonie est la plus parfaite. Il me semble qu'un des principaux objectifs de l'enseignement en mathématique est de développer la faculté de percevoir cette simplicité et cette harmonie que nous ne pouvons manquer d'apercevoir dans la physique contemporaine. Cela nous apporte une satisfaction profonde dans notre quête du savoir.[70]

[69] L'axiomatique des espaces vectoriels et en particulier l'« axiome de la dimension » [Dimensionsaxiom] se trouve en [RZM 1919, 15-17]. C'est cependant dans le 3ème paragraphe d'*Espace-Temps-Matière* [RZM 1919, 20-24] qu'Hermann Weyl développe des exemples extra-spatiaux d'espaces vectoriels multidimensionnels : l'espace des configurations d'un mélange gazeux (chaque dimension correspondant à un des éléments du mélange), l'espace des configurations d'un boulier, ou plus sérieusement l'espace des solutions d'un système d'équations linéaires. La notion d'une variété *n*-dimensionnelle est développée en [RZM 1919, 75-77]. Là aussi, Hermann Weyl donne des exemples qui sortent du seul cas de l'espace : la variété bidimensionnelle des ellipses à une isométrie près (les deux dimensions étant les longueurs des deux axes de l'ellipse), la variété bidimensionnelle des configurations physiques d'un gaz parfait (les deux dimensions étant la température et la pression), la variété bidimensionnelle des sons purs en acoustique (les deux dimensions étant la fréquence et l'intensité du son), ou encore la variété tridimensionnelle des couleurs telles qu'elles sont codées par la rétine.

[70] Notre traduction de [RZM 1919, 20] :

> Um die Raumgesetze in ihrer vollen mathematischen Harmonie zu erfassen, müssen wir von der besonderen Dimensionszahl n = 3 abstrahieren. Es hat sich nicht nur in der Geometrie, sondern in noch erstaunlicherem Maße in der Physik immer wieder gezeigt, daß, sobald wir die Naturgesetze, von denen die Wirklichkeit

Ainsi, même si elle est construite en vue de son application à la physique, la géométrie mathématique, comme toute autre discipline mathématique, doit viser la généralité pour atteindre ces objectifs d'harmonie et de simplicité. C'est seulement quand on rentre dans le domaine proprement physique, avec sa contrepartie expérimentale, que le nombre de dimensions en vient à être fixé à 4. On voit alors se dessiner une différence épistémologique essentielle entre la sphère mathématique où la règle est une recherche de généralité, et la sphère physique où, même en ce qui concerne les éléments fixes de la théorie comme le nombre de dimensions, le rapport à l'expérience intervient pour circonscrire le champ d'étude. Il est intéressant de remarquer que, dans les passages physiques du texte, pour justifier l'étude du cas particulier des variétés pseudo-riemannienne à 4 dimensions, Hermann Weyl ne s'appuie pas que sur l'expérience mais est en recherche d'arguments *a priori*. Ainsi est-il intéressé par le fait qu'il n'est possible d'exprimer un principe d'action (au sens physique du terme) sous une forme simple et naturelle la dimension 4[71].

Passons au deuxième exemple. Il s'agit de la façon dont Hermann Weyl traite le problème de la nature de la métrique, c'est-à-dire le problème de l'espace [Raumproblem] au sens strict du terme. Pour développer quelque peu notre exemple, il faut anticiper sur la conception riemannienne de la géométrie que nous développerons plus tard dans notre travail. Notre anticipation devra se limiter à ce qui est suffisant pour comprendre le statut des principes *a priori* qui interviennent dans la résolution de son problème de l'espace et qui légifèrent au sein de la sphère mathématique.

Le problème de l'espace consiste à circonscrire au niveau mathématique l'ensemble des fonctions envisageables pour représenter une notion de métrique ; ensemble au sein duquel la physique devra ensuite déterminer quelle est la (ou les) fonction(s) permettant d'exprimer les relations métriques réelles dans le monde. Comme nous le verrons, ce schéma épistémologique a été initié par Bernhard Riemann qui avait déjà posé sous une forme proche le problème de l'espace. Riemann savait déjà que les métriques qu'il étudiait (aujourd'hui « espaces de Riemann »), et que nous rangerons sous la rubrique des métriques « pythagoriciennes », ne correspondaient qu'à un cas particulier admettant de nombreux

beherrscht ist, erst einmal völlig durchdringen, diese sich in mathematischen Beziehungen von der durchsichtigsten Einfachheit und vollendetsten Harmonie darstellen. Den Sinn für diese Einfachheit und Harmonie, den wir heute in der theoretischen Physik nicht missen können, zu entwickeln, scheint mir eine Hauptaufgabe des mathematischen Unterrichts zu sein; sie ist für uns eine Quelle hoher Erkenntnisbefriedigung.

71 Hermann Weyl montre, par une considération sur la nature spatiale des quantités, que les candidats mathématiques les plus naturels [natürlichem] et simples [einfachem] pour représenter la grandeur d'action d'une théorie semblable à celle d'Einstein, n'ont de signification objective (c'est-à-dire ont les bonnes propriétés d'invariance) que pour le cas de la dimension 4. Cf. [RZM 1921, 282].

types de généralisations mathématiques possibles. A la même période que la parution d'*Espace-Temps-Matière*, il est connu que le mathématicien Paul Finsler étudiait à Göttingen une classe importante de ces généralisations possibles qu'on appelle aujourd'hui « espaces de Finsler » et qui ont pu jouer un rôle dans la formulation par Hermann Weyl du problème de l'espace[72].

L'important pour nous ici est de souligner la différence de comportement d'Hermann Weyl vis-à-vis de ces généralisations possibles de la notion de métrique par rapport à la première attitude que nous avons relevée vis-à-vis la multi-dimensionnalité. Alors que l'étude mathématique la plus générale était recommandée par Hermann Weyl quand il s'agissait de considérer les dimensions d'une variété ou d'un espace de Riemann, l'inverse se produit dans la résolution du problème de l'espace. Hermann Weyl se dirige alors au contraire dans le sens d'une *spécification* de la notion de métrique, allant même jusqu'à la détermination d'une seule et unique nature de la métrique, la « véritable » nature de la métrique susceptible d'être employée pour étudier l'espace.

Si la généralisation est de mise dans un cas et non pas dans l'autre c'est que les arguments qui poussent le mathématicien à restreindre son étude aux métriques « pythagoriciennes » et les arguments qui le poussent à restreindre son étude au cas des variétés 4-dimensionnelles n'ont pas le même statut épistémologique. Dans le dernier cas, c'est sans doute l'expérience qui nous apprend que notre espace-temps est une variété à 4 dimensions. Le physicien doit en tenir compte, mais le mathématicien qui cherche à atteindre une plus grande généralité doit développer la notion d'espace vectoriel ou de variété à un nombre indéterminé de dimensions. Pour ce qui est du problème de l'espace, ce n'est pas l'expérience qui pousse Hermann Weyl à se restreindre aux métriques pythagoriciennes mais bien un raisonnement basé sur des exigences rationnelles[73]. Ces exigences ont certes un rapport à la physique puisqu'il s'agit de déterminer la nature de la métrique la plus générale *susceptible de recevoir une signification physique*. Cependant ce rapport à la physique ne passe pas par l'expérience mais par des exigences de la raison qu'on peut interpréter dans la lignée des pensées idéalistes comme des conditions de possibilité d'une science objective des mesures spatiales. Ainsi, dans le domaine mathématique où elle peut régner sans partage, la raison a un rôle extrêmement normatif chez Hermann Weyl. Les mathématiques ne sont pas le lieu de constructions arbitraires de l'esprit, mais le lieu où s'exprime les exigences *a priori* de la raison en vue de fournir le cadre

[72] Cf. [Scholz Ed. 2001, 215-229]

[73] On détaillera dans notre partie IV.2. les principes intervenant dans sa résolution du problème de l'espace. Il s'agit d'une « analyse conceptuelle » de la notion de métrique à laquelle il faut ajouter deux principes (principe de liberté/principe de détermination univoque de la connexion affine) qui sont posés comme des exigences *a priori* pour parvenir à une notion de métrique objective la plus générale possible applicable à la notion d'espace.

le plus général pour la théorie de la mesure. Ce sont donc des considérations épistémologiques qui gouvernent les fondements des mathématiques chez Hermann Weyl. C'est sans doute ici que réside la nature essentiellement rationaliste de sa pensée.

Ainsi, l'ensemble du corps mathématique de la théorie tend à se confondre avec la partie *a priori* de la théorie au sens strict du terme. Et finalement l'opposition entre *a priori* et empirique tend à se confondre chez Hermann Weyl avec la dualité mathématique/physique qui est le fil directeur de toute la réflexion épistémologique d'*Espace-Temps-Matière.*

En ce qui concerne la délimitation des différentes sources du savoir au sein des éléments de la connaissance physique, et avant tout au sein du concept d'espace, l'influence de l'idéalisme allemand et de la phénoménologie husserlienne sur la pensée d'Hermann Weyl a été étudiée par des auteurs comme Thomas Ryckman, Paulo Mancosu ou Norman Sieroka auxquels nous renvoyons. Norman Sieroka montre comment Hermann Weyl interprète sa recherche personnelle des éléments *a priori* qui composent la notion d'espace comme une « analyse des essences » [Wesenanalyse] dans le sens employé par Husserl dans ses investigations phénoménologiques. L'article de Sieroka est consacré à la philosophie des mathématiques, mais son propos s'étend tout à fait aux recherches d'Hermann Weyl en physique mathématique. Ce renvoi à la phénoménologie suggère que les grandes notions qui guident l'avancée de la science physique comme celles de temps, d'espace, de matière, de force ou de champ, en tant qu'elles comportent des éléments *a priori*, peuvent être en partie les objets d'une philosophie introspective, d'une phénoménologie qui caractérise les intuitions que nous avons à leur propos.

Norman Sieroka montre cependant que l'esprit de la philosophie phénoménologique de Husserl, attaché à la saisie intuitive directe d'essences[74] n'est pas pleinement compatible avec le type d'approche historique et dynamique de la philosophie qu'entreprend Hermann Weyl depuis l'intérieur de la science[75]. Il montre alors comment notre mathématicien utilise la philosophie de Fichte, et dans une moindre mesure celle de Leibniz, pour nuancer l'aspect

[74] C'est la "Wesenschau" husserlienne, « l'assertion selon laquelle on peut *saisir par l'intuition* ou mieux *voir les essences* en réfléchissant sur nos actes mentaux » [Sieroka 2008, 6]. Cf. aussi [Sieroka 2006, 25]. D'où l'importance dans la philosophie husserlienne du terme «intuition » [Anschauung] qu'Hermann Weyl interprète comme une saisie passive [passive Schau].

[75] . On trouve dans [Sieroka 2008b, 6-7].le texte de Weyl suivant :

> « Nous ne possédons pas la vérité[.] Il ne suffit pas seulement d'ouvrir grand les yeux pour la voir[.] Mais nous devons *agir* et une partie de la vérité nous sera alors dévoilée par notre action effective. »

(notre traduction) Dans *Notizen über Symbolismus: Praxis, Theorie und Magie des Zahlen***,** Zürich: E.T.H.-Bibliothek, Archive Hs91a:22.

trop passif et spéculatif de la philosophie de Husserl[76]. Hermann Weyl retient de Fichte que la connaissance est le fruit d'une activité du sujet avec son environnement. Il pense alors l'opposition entre Fichte et Husserl dans les termes d'une opposition entre une phénoménologie passive et un constructivisme actif qui part toujours de l'ego agissant[77]. Weyl trouve donc dans la philosophie de Fichte telle qu'il la reçoit, la justification de sa propre vision des rapports entre philosophie et sciences telle que nous l'avons exposée dans le paragraphe I.2.b., niant la possibilité d'atteindre les principes *a priori* de la connaissance par une saisie intuitive directe préalable à l'analyse concrète des résultats scientifiques.

On doit alors remarquer qu'en développant une vision des principes *a priori* comme n'étant découverts qu'à l'occasion d'une activité du sujet lisible à l'intérieur des théories, et pouvant être révisés au fur et à mesure de leur développement, Hermann Weyl participe au même mouvement d' « historisation » et de « relativisation » de l'*a priori* qui servait à la même époque aux néokantiens de l'école de Marbourg et au jeune Reichenbach à sauvegarder l'esprit de la philosophie kantienne tout en l'extrayant du lien fort qu'elle semblait entretenir avec la géométrie euclidienne comprise comme unique cadre spatial pouvant s'imposer à la réalité[78]. La remise en cause des sciences classiques, en l'occurrence celle de la géométrie avec l'établissement des géométries non euclidiennes au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, celle de la physique newtonienne avec la révolution relativiste opérée par Einstein, et le renouveau de la logique, avaient montré l'insuffisance des éléments de connaissance *a priori* posés par Immanuel Kant en une liste dont la justesse et l'exhaustivité étaient supposées fondées sur des intuitions pures (pour ce qui est des formes de la sensibilité) ou sur une déduction transcendantale (pour ce qui est des catégories) qui en était les garants *a priori*. Il est bien connu que les philosophes d'influence kantienne que nous venons de citer ont voulu sauver l'esprit de la philosophie critique au prix d'une modification du statut des principes *a priori* de la connaissance. En inscrivant la découverte de ces principes dans le retour réflexif sur les théories scientifique dans leur évolution, les néokantiens niaient le caractère d'*évidence* de ces principes supposé nous permettre d'en faire la liste exacte et exhaustive. On voit bien l'analogie frappante entre cette démarche et celle d'Hermann Weyl qui, tout en rejetant la philosophie d'Immanuel Kant à cause de son adhésion naïve supposée à la géométrie euclidienne, conserve l'idée de principes *a priori* servant de condition de possibilité à la construction théorique de la physique, principes que nous ne

[76] C'est en lisant Fichte qu'Hermann Weyl aurait porté son attention sur la philosophie de Leibniz. Cf. [Sieroka 2008, 8] La notion dynamique de substance qu'on trouve chez Leibniz était sans doute une source d'inspiration pour Weyl afin de penser la notion de sujet connaissant et corriger l'aspect figé des principes de la philosophie critique. Voir [Sieroka 2008, 6] pour la façon dont les philosophies de Fichte et Leibniz servaient à Hermann Weyl de contrepoids à celle de Husserl.

[77] Cf. [Sieroka 2008]. Cette distinction se trouve aussi, selon Sieroka, chez Oskar Becker, sans qu'il soit possible de savoir lequel de Weyl ou de Becker a influencé l'autre pour penser cette distinction.

[78] [Ryckman 2005, 13-19].

pouvons cependant découvrir qu'à l'occasion du retour réflexif sur les théories dans leur évolution.

Nous n'avons pas de trace d'une connaissance approfondie et directe qu'Hermann Weyl aurait eu de cette approche néokantienne. Dans ses grands textes de la période 1917-1923 nous n'avons trouvé aucune référence aux philosophes de Marbourg ou aux autres philosophes que Thomas Ryckman catégorise parmi les interprètes idéalistes de la théorie de la relativité, à savoir le jeune Hans Reichenbach et sir Arthur Eddington. Ainsi, à s'en tenir aux textes, il semble que cette confluence de l'approche d'Hermann Weyl avec celles des néokantiens et des autres idéalistes soit plutôt le fruit de réflexions menées en parallèles sur les insuffisances de la philosophie kantienne, plutôt que par une méditation informée de ces autres auteurs. La remise en cause des fondements de la géométrie et de la physique avait attiré l'attention de toute la communauté des penseurs de la philosophie sur l'insuffisance d'une théorie de la connaissance qui pose une liste de principes *a priori* pour fonder le savoir scientifique, supposée exhaustive et définitive. Nous devons être cependant prudents quant à cette supposée indépendance de la pensée d'Hermann Weyl à l'égard des néokantiens, dans la mesure où il était courant à cette époque de reprendre à son compte des pensées, des démarches intellectuelles, sans se sentir obliger de citer ses sources[79].

Pour en revenir aux textes, mis à part son rapport à Edmund Husserl, ce n'est finalement pas chez les autres auteurs contemporains ayant des préoccupations proches qu'Hermann Weyl cherche des appuis pour sa propre position, mais dans les figures des grands philosophes allemands des siècles passés comme Fichte[80] ou Leibniz, chez qui il voyait les germes de la façon dont on pouvait corriger l'approche de la philosophie critique pour atteindre une authentique théorie de la connaissance prudente, construite dans le dialogue avec la science en mouvement.

Nous allons en rester là concernant le statut général de l'*a priori* dans la pensée d'Hermann Weyl pour nous focaliser sur les problèmes ontologiques et épistémologiques

[79] Dans [Sieroka 2006, 8], Norman Sieroka nous apprend que Fritz Medicus, le principal interlocuteur en philosophie d'Hermann Weyl à cette époque, avait une pratique de la philosophie qui peut paraître étonnante de la part d'un professionnel, fuyant les citations et préférant toujours la reconstruction de la pensée des auteurs étudié.

[80] Cf. [Sieroka 2008, 6] pour la lecture antifondationnaliste de Fichte qui permet d'y voit le précurseur de l'historisation des *a priori* kantiens. Relevons la citation de Fichte :

> « Nous ne sommes pas les législateurs de l'esprit humain mais ses historiographes ; nous sommes bien sûr pas journalistes mais plutôt les écrivains d'une histoire pragmatique. » [Fichte, 1794, 69] (notre traduction à partir du texte de Sieroka)

particuliers auxquels Hermann Weyl répond dans son analyse du problème de l'espace. Notre position est alors la suivante. Nous adhérons à la thèse générale de Thomas Ryckman selon laquelle le travail d'Hermann fait partie d'une famille d'approches que l'on peut étiqueter si on le souhaite, quoique avec prudence, sous le terme d'« idéalismes transcendantaux ». Ces approches ont en commun de chercher à exhiber, au sein de la connaissance mathématico-physique, des éléments *a priori* qui rendent possible le rapport à l'expérience et sont déterminés par des réquisits de la raison. Mais nous n'approfondirons la signification précise de ces éléments *a priori* dans la pensée d'Hermann Weyl qu'au fur et à mesure que nous rentrerons dans les détails de sa théorie de l'espace-temps.

e. Un autre rapport d'Hermann Weyl à la philosophie : la résolution du problème de l'espace

A partir de ces considérations générales sur la nature de la théorie de la connaissance et les liens entre Hermann Weyl et la philosophie, nous pouvons envisager trois types d'approches philosophiques du travail d'Hermann Weyl dans la période 1917-1923.

Une première approche, qui semble adoptée par Skuli Sigurdsson dans sa thèse, ou par Lewis Pyenson, consiste à éclairer le sens des choix scientifiques et épistémologiques d'Hermann Weyl par la reconstitution du contexte dans lequel sa pensée est née, en prenant « contexte » au sens large de ses références philosophiques, du milieu intellectuel des scientifiques et philosophes qu'il fréquentait, et du contexte socio-politico-économique de l'Allemagne de la république de Weimar. C'est donc une approche historique transdisciplinaire qui déborde le simple rapport d'Hermann Weyl à la philosophie.

Une seconde méthode est celle adoptée par exemple dans les articles de Norman Sieroka[81] que nous avons abondamment cités dans les paragraphes précédents. Il s'agit alors de restituer les interprétations proposées par Hermann Weyl des philosophes qui sont ses principales références, et de voir comment il en tire ce que nous avons appelé des « heuristiques », c'est-à-dire des fils directeurs pour sa recherche scientifique fondés sur une

[81] Dans [Sieroka 2006], en particulier [Sieroka 2006, 2-3], Norman Sieroka montre que la méthodologie adéquate pour étudier l'influence de l'idéalisme allemand sur la pensée d'Hermann Weyl serait la méthode de la *Konstellationsforschung* développée par Dieter Heinrich. Il s'agit de ne pas interpréter de façon isolée les textes où Hermann Weyl développe ses interprétations des philosophes allemands, mais en relation avec une « constellation » d'autres textes développés par les membres de l'entourage intellectuel proche d'Hermann Weyl (en premier lieu, Fritz Medicus). D'après Sieroka, cette recontextualisation des interprétations philosophiques d'Hermann Weyl donne un éclairage indispensable à leur compréhension. Norman Sieroka justifie de plus cette méthodologie par une similarité entre la notion de sujet développée par Hermann Weyl, celle qu'on trouve en général dans l'idéalisme allemand, et celle qui sous-tend la méthodologie de Dieter Heinrich.

certaine vision de la théorie de la connaissance et de ses interactions avec le développement historique de la science. Ce type d'approche conduit alors naturellement à privilégier les rapports d'Hermann Weyl avec des philosophes comme Husserl, Fichte ou encore Leibniz.

Mais il y a une troisième voie d'étude des rapports de Weyl à la philosophie. Il s'agit d'étudier, de façon interne aux travaux scientifiques d'Hermann Weyl, les avancées philosophiques auxquelles il est parvenu en mettant en pratique, sur des problèmes philosophiques particuliers, ces « heuristiques » qu'il a développées à partir de sa propre expérience et de son rapport aux philosophes de l'idéalisme allemand. C'est cette troisième voie que nous avons suivie en nous focalisant spécifiquement sur le problème de l'espace.

Le problème de la théorie de la connaissance, quand on l'applique à une science particulière, amène en effet à une prise de position sur l'ontologie particulière de cette science et sur le statut épistémologique qu'elle occupe au sein des autres disciplines du savoir. C'est ainsi que la réflexion qu'accomplit Hermann Weyl sur la théorie de la relativité générale à travers *Espace-Temps-Matière* et les textes apparents, l'amène à prendre partie d'une part sur la nature de l'espace, du temps, de la matière et de la façon dont nous pouvons nous y rapporter, et d'autre part sur des questions épistémologiques concernant la place de la (chrono-)géométrie entre mathématiques pures et physique.

En adoptant ce point de vue sur la pensée d'Hermann Weyl, nous nous sommes prioritairement intéressés aux références majeures qui lui ont servi à construire sa position philosophique sur la nature de l'espace-temps et son rapport à la matière. Ces références ne sont pas tant les grands auteurs de la tradition philosophique que nous avons cités, mais plutôt les grands scientifiques réfléchissant sur la science qui ont participé au développement des théories sur laquelle se base l'analyse d'Hermann Weyl. Ce sont soit des scientifiques engagés dans la physique comme Albert Einstein lui-même, David Hilbert ou James Clerk Maxwell, ou des géomètres tels que Bernhard Riemann, Felix Klein, Sophus Lie, et Tullio Levi-Civita. Nous ne pourrons bien sûr aborder pour eux-mêmes ces auteurs. Mais notre analyse du travail d'Hermann Weyl ne devra cependant pas perdre de vue cette lignée historique à l'intérieur de laquelle il se situe. Nous ferons ainsi appel ponctuellement appel à ces auteurs quand l'approche de Weyl se construit explicitement dans la continuation ou la rupture avec l'un d'entre eux.

En adoptant cette troisième voie d'étude, nous avons ainsi décidé d'admettre comme un présupposé le type de filiation qui existe entre la pensée d'Hermann Weyl et l'idéalisme allemand, pour nous concentrer sur les résultats philosophiques précis auxquels aboutit Hermann Weyl à travers son analyse des concepts d'espace-temps et de matière au sein de la théorie de la relativité générale. Cette troisième manière d'interroger les rapports de Weyl à la philosophie a ceci d'intéressant qu'elle prend au sérieux la position même d'Hermann Weyl qui refuse de penser la philosophie comme un préalable anhistorique à la science, comme un simple système auquel on devrait adhérer avant toute analyse des résultats atteints par les théories scientifiques. Nous avons ainsi choisi d'analyser la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl *en adoptant son propre point de vue sur les rapports entre sciences et philosophie.*

3. La période 1917-1923 et la constitution du problème de l’espace

a. Parcours rapide des textes de cette période

Notre étude des résultats philosophiques élaborés par Hermann Weyl concernant l’espace-temps s’est portée naturellement sur la période qui s’étend de 1917 à 1923 pendant laquelle Hermann Weyl était impliqué au plus haut point par la problématique générale de l’espace et par le développement de la théorie de la relativité générale et des fondements de la géométrie. La très grande majorité des écrits d’Hermann Weyl de cette période concerne les concepts fondamentaux de la géométrie, avec ou sans lien direct avec la théorie de la relativité générale, à l’exception de quelques écrits, et avant tout *Le Continu*, qui marquent un renouveau de l’intérêt d’Hermann Weyl pour les fondements des mathématiques pures (arithmétique et analyse). Le renouveau de cet intérêt, alors que Weyl était plongé dans l’étude de la relativité, a pu étonner, y compris dans son entourage. Nous essaierons cependant de mettre à jour le maximum de cohérence entre ces deux préoccupations. Il faut remarquer d’abord que le *problème du continu*, fil directeur de ses travaux de fondements des mathématiques pures, consiste à comprendre les relations entre le phénoménal, le mathématique et le physique au sein de la notion de continu. En tant que tel, il participe à l’analyse philosophique de la notion d’espace, puisque l’espace est le prototype d’un continuum. Les travaux sur la notion d’espace et les travaux sur la notion de continu font donc partie d’un seul et même ambitieux programme visant à fonder les mathématiques en relation avec leur insertion dans la construction physique. Nous aurons l’occasion de revenir ponctuellement sur la façon dont les thèses et outils élaborés par Hermann Weyl dans *Le Continu* interviennent dans ses travaux sur l’espace. Nous n’aurons cependant évidemment pas l’occasion d’exposer pleinement ses thèses sur les fondements de la théorie des nombres et particulièrement du continu, et sur ses relations aux mathématiques intuitionnistes de Brouwer. Il existe une littérature abondante à ce sujet.

Notre analyse des conceptions de l’espace(-temps) d’Hermann Weyl sera centrée avant tout sur le texte d’*Espace-Temps-Matière*, grande monographie qui présente à la fois la théorie de la relativité générale et son interprétation par Hermann Weyl, mais aussi tous les concepts géométriques qui entrent dans l’expression de la théorie ou peuvent servir à l’éclairer. Il faut cependant être prudent dans notre rapport à ce texte dont la nature est particulière. Rappelons qu’il est au départ issu d’un cours général sur la théorie de la relativité professé par Hermann Weyl à l'école polytechnique fédérale (E.T.H.) de Zurich. Si on pense, en outre, au style toujours très historique des écrits de Weyl, on s'aperçoit que cette œuvre n'a rien d'un exposé linéaire de la pensée de l'auteur. A celle-ci se mêle en permanence la pensée des géomètres, physiciens et philosophes qui font partie de l'histoire de la construction du concept relativiste d'espace qu'il reconstruit. Le texte suit en effet un ordre partiellement historique et partiellement génétique, procédant à la fois par des appels à l'histoire du développement de la géométrie et de la physique, et par complexification et enrichissement progressif des notions introduites.

A cette difficulté se joint celle de la multiplicité des éditions de l'ouvrage qui, à l'exception de la seconde édition, comportent toujours un remaniement de la forme mais aussi une évolution dans les thèses avancées. Ainsi, cette œuvre est tout à la fois un manuel général de géométrie et de théorie de la relativité, mais aussi l'occasion pour Hermann Weyl de présenter ses propres positions et innovations au fur et à mesure de leur évolution, en les insérant dans les différentes éditions de l'ouvrage. Ainsi, plutôt que comme un seul ouvrage unifié, nous considérons avec Erhard Scholz les différentes éditions d'*Espace-Temps-Matière* comme un moyen pratique pour avoir une vue d'ensemble de l'évolution des idées d'Hermann Weyl concernant la géométrie et la théorie de la relativité pendant sa période d'implication maximale dans ces domaines[82].

Quelques va-et-vient entre *Espace-Temps-Matière* et quelques articles scientifiques majeurs de cet auteur de la période concernée peuvent suffire à discerner au sein de l'ouvrage majeur ce qui est véritablement un apport propre à l'auteur. Ces articles ont en effet un tour moins historique et sont plus nettement focalisés sur les apports originaux de Weyl. Chacun traite séparément de quelques outils et problèmes qu'on retrouve ensuite dans *Espace-Temps-Matière*. Leur lecture peut donc participer à une meilleure délimitation des différents thèmes de l'œuvre majeure. En procédant ainsi, nous avons voulu faire du fait qu'Hermann Weyl insère sa pensée dans un large contexte historique non pas un inconvénient, brouillant les pistes menant à une compréhension de l'originalité de son point de vue, mais un atout permettant d'éclairer le contexte de sa pensée par la connaissance de la façon dont il pense ses rapports à la tradition. Nous rappelons cependant que notre travail concerne avant tout *Espace-Temps-Matière* et que les autres articles n'ont été consultés que très ponctuellement et seulement e*n tant qu'ils nous permettaient d'éclairer certains points de l'ouvrage majeur*.

A côté d'*Espace-Temps-Matière*, les textes que nous avons principalement consultés sont les deux articles essentiels ayant introduit la géométrie infinitésimale pure d'Hermann

[82] [Scholz 1994, 205]

Weyl : « la Géométrie infinitésimale pure »[83] et « Gravitation et électricité »[84], ainsi que le texte des conférences intitulées l'*Analyse mathématique du problème de l'espace*. De nombreux autres articles d'Hermann Weyl concernant la théorie de la relativité, la géométrie infinitésimale et le problème de l'espace ont été écrits pendant cette période prolifique de 1917-1923. A l'aide des deux premiers tomes du recueil des œuvres d'Hermann Weyl[85], on dénombre 22 articles/conférences sur ces thèmes pendant la période 1917-1923 On peut les classifier rapidement ainsi :

Géométrie infinitésimale pure et théorie unifiée des champs de Weyl :

1918: *Reine Infinitesimalgeometrie*, **1918:** *Gravitation und Elektrizität*, **1918:** *Ein neue Erweiterung der Relativitätstheorie*, **1920:** *Elektrizität und Gravitation*, **1921:** *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung*, **1921:** *Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie*, **1921:** *Feld und Materie*, **1921:** *Electricity and Gravitation*, **1922 :** *Zur Infinitesimalgeometrie: p-dimensionale Fläche im n-dimensionalen Raum*

Autres articles sur la théorie de la relativité générale et la gravitation:

1917: *Zur Gravitationstheorie*, **1919 :** *Über die statischen kugelsymmetrischen Lösung von Einsteins « Kosmologischen » Gravitationsgleichungen*, **1923:** *Entgegnung auf die Bemerkungen von Herrn Lanczos über die de Sittersche Welt*, **1919:** *Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen*, **1920:** *Die Einsteinsche Relativitätstheorie*, **1922:** *Neue Lösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen*, **1922:** *Die Relativitätstheorie auf der Naturforscherversammlung*, **1923**: *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*

Articles/Conférences sur le problème de l'espace:

1921: *Das Raumproblem* (1ère partie), **1922:** *Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung*, **1922:** *Das Raumproblem*(2ème partie), **1923:** *Zur Charakterisierung der Drehungsgruppe*, **1923:** *Mathematische Analyse des Raumproblems* (non publié dans [GA])

La période 1917-1923 se termine par la publication à peu près simultanée de la cinquième édition d'*Espace-Temps-Matière* et de conférences ayant eu lieu en 1922 à Barcelone et Madrid, et publiées sous le nom : *l'Analyse mathématique du problème de l'espace.* Hermann Weyl y présente son analyse mature du concept de l'espace au sein de la géométrie différentielle (et de la théorie de la relativité, quoique la partie physique de la réflexion passe désormais au second plan), et sa solution au problème de l'espace compris en son sens strict d'une recherche de caractérisation du « bon » groupe de transformations infinitésimales exprimant la « nature de l'espace ». On peut considérer ce texte comme une

[83] [Weyl 1918b]

[84] [Weyl 1918c]

[85] [GA]

annexe philosophique des recherches présentées dans *Espace-Temps-Matière*, comme Hermann Weyl nous le demande lui-même[86]. Les résultats de son analyse du problème mathématique de l'espace sont incorporés à *Espace-Temps-Matière* à partir de la 4ème édition dans un nouveau paragraphe[87]. Nous nous en tiendrons à ce qui y a été effectivement reporté.

L'avancée décisive de la mécanique quantique pendant la période 1924-1926 coïncide avec la fin de l'investissement massif d'Hermann Weyl dans la théorie de l'espace en rapport à la physique relativiste. D'après certains historiens et philosophes des sciences[88], les raisons de ce désintéressement ne se réduisent pas à l'épanouissement de cette nouvelle théorie qui contredit toute approche continuiste de la matière. Certains problèmes internes à la partie physique de la théorie de Weyl avaient déjà pesés dans sa nouvelle orientation quelques années auparavant. Nous y reviendrons. Ce basculement est lisible en même temps que la reprise de certains thèmes d'*Espace-Temps-Matière* dans le texte plus tardif de *la Philosophie des mathématiques et des sciences naturelles*[89], la plus grande monographie de Weyl qui se donne comme un ouvrage de philosophie. Ce texte comporte cependant déjà d'importants changements dans la position d'Hermann Weyl. Aussi, nous ne nous y référerons pas.

b. La construction du problème de l'espace au fil des différentes éditions d'*Espace-Temps-Matière*

Comme le montre Erhard Scholz dans «La Contribution d'Hermann Weyl à la géométrie : 1917-1923 »[90], le parcours du contenu des différentes éditions d'*Espace-Temps-Matière* nous donne un condensé de l'évolution des conceptions d'Hermann Weyl sur la géométrie de l'espace-temps. Nous allons tracer les traits marquants de cette évolution au regard de notre problématique, c'est-à-dire en la considérant comme la mise en pratique progressive d'un programme épistémologique visant à fonder simultanément les mathématiques et la physique de l'espace à partir de l'idée d'une

[86] Préface à [Weyl 1923]

[87] [RZM 1921, 124-134] « §18 La métrique spatiale du point de vue de la théorie des groupes » [Gruppentheoretische Auffassung der Raummetrik]

[88] Cf. par exemple [Sieroka 2006, 9-10] pour voir qu'Hermann Weyl commençait déjà en 1920 à se détacher de l'idée de pouvoir réduire la matière à la notion de champ. C'est cet échec de la théorie des champs pour rendre compte de la structure intime de la matière qui serait responsable du désintérêt progressif de Weyl pour la théorie des champs de 1920 à 1924.

[89] [Weyl 1927]

[90] [Scholz, 1994]

Nahegeometrie, idée dont la réalisation mathématique aboutit à la géométrie infinitésimale pure d'Hermann Weyl. Pour la détermination des points véritablement originaux dans le parcours de ces éditions, en plus de la consultation directe des textes sources, nous nous sommes servis amplement de l'article d'Erhard Scholz dont nous venons de citer le titre.

Dès sa première édition, *Espace-Temps-Matière* a une structure en quatre chapitres qui sera toujours conservée. Nous interprétons cette quadripartition comme issue d'une double distinction. La première est évidente, il s'agit de la séparation entre la partie purement mathématique de la géométrie qu'Hermann Weyl aborde dans les deux premiers chapitres, et la partie physique de la géométrie qu'Hermann Weyl considère dans les deux derniers chapitres, ajoutant aux structures purement mathématiques les lois régissant le comportement de la matière dans son interaction avec l'espace-temps. Cette distinction est si bien marquée qu'on peut lire séparément les deux premiers chapitres comme un traité mathématique de géométrie. Nous proposons de comprendre la deuxième distinction, qui oppose d'une part le premier chapitre au deuxième chapitre, et d'autre part le troisième au quatrième, comme étant le passage du point de vue d'une « géométrie à distance » (Ferngeometrie) à une « géométrie par contact » (Nahegeometrie). En effet, le passage du premier chapitre au second est celui de la géométrie euclidienne et du calcul tensoriel qu'on peut y opérer, à la géométrie riemannienne, pseudo-riemannienne et plus généralement aux « espaces de Weyl » qui sont des géométries différentielles construites à partir du point de vue de la Nahegeometrie réalisé de manière plus ou moins pure. De même le passage du chapitre trois au chapitre quatre correspond au passage de cette physique fondée sur un « espace à distance » [Ferngeometrie][91] qu'est la théorie de la relativité restreinte à cette physique fondée sur un « espace par contact » [Nahegeometrie] qu'est la théorie de la relativité générale et la généralisation qu'en propose Weyl[92].

[91] Il serait exagéré de qualifier la théorie de la relativité restreinte de « physique par contact » dans la mesure où la révision de la mécanique qu'elle propose incorpore au cadre géométrique la propagation à vitesse finie des interactions interdisant précisément toute action à distance. Cependant, il est bien connu que la gravitation telle qu'elle existait en 1905 ne pouvait entrer dans ce schéma et était en attente d'une expression en termes d'un champ se propageant à vitesse finie. La théorie de la relativité générale répond à cette attente. Mais ce n'est pas le plus important. Si la relativité restreinte prend acte de la propagation de proche en proche des interactions, en revanche *la notion d'espace* dont elle se sert n'est pas construite avec le point de vue d'une *Nahegeometrie* qui n'imposerait sa structure que pour les relations de proximité [Nahe]. L'espace(-temps) de la théorie de la relativité restreinte est un espace(-temps) absolu qui fixe une seule et même structure géométrique à distance [Fern] sur l'ensemble de l'univers spatio-temporel. L'élimination d'une conception absolutiste de l'espace n'est possible que pour une géométrie qui a dépassé le point de vue de la *Ferngeometrie*. La loi de la propagation à vitesse finie des interactions doit donc concerner les structures métriques de l'espace lui-même, et non pas seulement les interactions *à l'intérieur* de l'espace. C'est ainsi qu'on justifie l'analogie : $\frac{chapitre\ 2}{chapitre\ 1} = \frac{chapitre\ 4}{chpitre\ 3}$ qui, selon nous, structure l'ensemble d'*Espace-Temps-Matière*.

[92] Il faut attendre la troisième édition pour disposer de cette généralisation, c'est-à-dire la théorie de l'unification géométrique de la gravitation et de l'électromagnétisme par le biais d'un espace de Weyl.

La première édition présente déjà une analyse lucide de la façon dont la théorie de la relativité générale a renouvelé la problématique générale de l'espace consistant à séparer ce qui, du point de vue de sa structure, y est fixé *a priori* et ce qui y est dépendant de la contingence des circonstances physiques. Hermann Weyl y note déjà[93] que l'innovation majeure dans la théorie de la relativité générale ne consiste pas dans l'adoption seule du principe général de covariance mais aussi dans la reconnaissance du fait que le tenseur g_{mn} qui donne les relations métriques a le statut d'une entité physique, d'un champ dynamique en interaction avec la matière. C'est seulement parce qu'elle comporte simultanément ces deux traits que la théorie d'Einstein réalise l'idée d'une relativité générale du mouvement. Mais, bien que cette révolution conceptuelle radicale concernant l'espace prenne la forme d'un nouveau recours nécessaire à l'expérience pour la détermination des relations métriques, l'interprétation d'Hermann Weyl dans cette première édition n'est déjà pas réductible à une philosophie empiriste de l'espace. Hermann Weyl insiste sur le fait que l'appareil mathématique nouveau qu'est la géométrie de Riemann, même s'il ne détermine pas complètement à lui seul les relations métriques, est une construction conceptuelle qui répond à des exigences de la raison[94]. Cet aspect ne fera que croître au fur et à mesure des éditions. Le plan même de l'ouvrage, qui sépare nettement la partie purement mathématique de la théorie de la partie physique, participe de cette mise en évidence d'une opposition de statut épistémologique entre un espace comme forme mathématique homogène déterminée par certaines considérations *a priori*, et un ensemble de relations métriques contingentes issues d'une interaction entre l'espace(-temps) et la matière.

La première édition *d'Espace-Temps-Matière* contient aussi déjà les clefs de la façon dont Hermann Weyl va concilier ces deux polarités opposées que sont l'espace comme forme homogène et les relations métriques dynamiques et hétérogènes du champ gravitationnel. Il s'agit de donner à chacune de ces deux polarités leurs sphères légitimes d'application par le biais de la distinction entre la sphère du proche [Nahe] et la sphère du lointain [Fern]. La physique moderne des champs ne trouve son expression légitime que dans une Nahegeometrie, c'est-à-dire une géométrie dont les structures de proximité [Nahe] sont fixées *a priori* et indépendamment du point où l'on se place, mais où les relations à distances sont déterminées physiquement par l'interaction avec le contenu physique de l'espace qui détermine les orientations respectives des espaces infinitésimaux qui composent l'espace global. Cette compréhension de la géométrie de Riemann comme Nahegeometrie est accentuée par Hermann Weyl par l'introduction du concept de *transport parallèle des vecteurs* qu'il emprunte à Tullio Levi-Civita et dont il donne une interprétation

---

[93] [RZM 1918, 180-181]

[94] Le chapitre basé sur [Riemann 1854] contenant l'analyse conceptuelle du concept de métrique figure déjà dans [RZM 1918, 75-85].

physique originale comme «champ de guidage gravitationnel »[95]. Ce programme interprétatif de l'espace relativiste comme Nahegeometrie ne pouvait cependant tout à fait fonctionner dans la présentation d'Einstein, car la géométrie de Riemann sur laquelle Einstein s'appuyait comportait encore un aspect des géométries à distance qu'Hermann Weyl souhaite alors éliminer.

Dans ses travaux de l'année 1918, quelques mois après la parution de la première édition, Hermann Weyl arrive à épurer la géométrie analytique de Riemann de son résidu de détermination « à distance ». Il parvient ainsi à sa géométrie infinitésimale, présentée pour la première fois dans « La Géométrie infinitésimale pure »[96], et qu'on appelle de nos jours « espace de Weyl ». Il l'insère dans *Espace-Temps-Matière* à partir de la 3ème édition. Dans cette géométrie, non seulement l'orientation des vecteurs mais aussi leurs longueurs ne sont comparables à distance que par intégration de changements infinitésimaux de proche en proche. Hermann Weyl généralise en outre la notion de déplacement parallèle d'un vecteur pour l'émanciper de la supposition d'une structure métrique, parvenant à la notion générale de « connexion affine ». Chaque strate de relations composant la notion mathématique d'espace (la strate affine, la strate conforme et la strate métrique) se trouve alors développée indépendamment des strates de niveaux supérieurs et par un même schéma consistant à « connecter » ensemble tous les espaces de proximité identiques qui composent l'espace global à la façon d'un immense patchwork. On peut alors affirmer que la construction mathématique de la géométrie avait atteint dans cette troisième édition d'*Espace-Temps-Matière* la forme qui était réclamée par l'idée d'une Nahegeometrie.

Le programme épistémologique de la Nahegeometrie ne répondait pas qu'à des motifs mathématiques. Cette géométrie devait fournir le cadre naturel pour exprimer l'idée physique d'une ontologie de l'espace et de la matière réduite à un seul type d'entité : des champs dynamiques continus dont les propriétés s'expriment géométriquement. Il restait donc à voir comment la partie physique de la théorie d'Einstein allait s'accommoder de cette nouvelle construction de la géométrie infinitésimale pure. Confiant en la supériorité de sa construction mathématique, Hermann Weyl va plus loin qu'une simple réécriture de la théorie d'Einstein. Il remarque une étonnante similarité entre, d'une part, les propriétés formelles de la forme différentielle φ^i qu'il avait introduite pour exprimer la connexion métrique de sa géométrie et d'autre part les propriétés du potentiel électromagnétique. Cela l'amène à faire l'hypothèse que la théorie de la relativité générale pourrait être étendue en une nouvelle théorie physique qui exprime globalement les interactions électromagnétiques et gravitationnelles par une seule et même structure géométrique du

[95] Cf. [Scholz 1994, 206]

[96] [Weyl 1918c]

type « espace de Weyl ». Cette hypothèse est également introduite dans la 3ème édition d'*Espace-Temps-Matière*. Celle-ci peut donc être considérée comme l'état mature de l'épistémologie de la Nahegeometrie proposée par Hermann Weyl, présentant à la fois une refondation de la géométrie et l'espoir d'un élargissement de la théorie physique d'Einstein pour englober l'ensemble de la physique connue jusqu'alors dans un seul édifice unifié de nature entièrement géométrique.

Les deux dernières éditions d'*Espace-Temps-Matière* seront marquées à la fois par l'abandon progressif de certaines des thèses défendues dans les trois premières éditions, et d'autre part par l'achèvement d'une pièce essentielle de la construction épistémologique d'Hermann Weyl : sa réponse au problème de l'espace (compris dans son sens strict) conforme à l'esprit de la Nahegeometrie.

D'abord, Hermann Weyl va abandonner sa prétention de réduire la notion de matière (et donc celle de particule) à la seule notion de champ. La mécanique quantique une fois développée, au milieu des années 1920, confirmera sans doute qu'il est illusoire de vouloir réduire le comportement des particules à celui de champs continus. Ensuite, Hermann Weyl prend également ses distances vis-à-vis de son hypothèse d'interprétation physique de la géométrie infinitésimale comme permettant l'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme. Selon les commentateurs, ce deuxième recul ne semble pas dû seulement aux critiques d'Einstein ou Pauli, mais aussi au fait que, en raison de son premier recul relatif à la réduction ontologique de la notion de matière, sa théorie n'était plus porteuse des mêmes espoirs. S'il pouvait encore espérer qu'elle permette une meilleure compréhension des interactions entre gravitation et électromagnétisme, il ne pensait plus qu'elle puisse résoudre le problème de la nature de matière ; ce qui était sa motivation principale. Hermann Weyl va alors se tourner progressivement vers un nouvel axe de recherche : la théorie mathématique de la représentation des groupes de Lie et son application physique à la mécanique quantique.

Cependant, ces reculs ne remettent en question que la réduction ontologique de la matière à un champ, voire à l'espace lui-même, et donc corrélativement la réduction de la physique à la géométrie. En revanche, ils n'atteignent pas la conception par Hermann Weyl de l'espace-temps comme devant répondre aux exigences de la Nahegeometrie. De fait, Hermann Weyl changera sa conception de la matière, aboutissant petit à petit à une notion de matière-agent interagissant avec l'espace-temps tout en lui étant extérieur[97]. Mais il ne changera pas pour autant sa notion d'espace. Ainsi, à côté des reculs concernant la « théorie

[97] Voir comment Hermann Weyl pense la matière dans sa « théorie de l'agent ». Par exemple dans [Sieroka 2006].

pure du champ » et l'unification géométrique de l'électromagnétisme avec la gravitation, les années 1921-1923 mettent la touche finale à la vision de l'espace d'Hermann Weyl en fournissant une justification de la forme générale de la métrique adoptée dans sa géométrie infinitésimale

En effet, Hermann Weyl parvient à adapter le problème riemannien de l'analyse mathématique de la notion de métrique au nouveau cadre de la géométrie infinitésimale pure. Puisque l'espace doit être construit par connexion de structures infinitésimales, il s'agit de trouver et de justifier quel est « le bon » groupe infinitésimal susceptible de caractériser la « nature de l'espace ». C'est ce qu'il appelle, au sens propre, le *problème de l'espace*. Sa solution à ce problème est intégrée dans la 4ème édition *d'Espace-Temps-Matière*. Ainsi, les premières éditions avaient déterminé la sphère d'application légitime des considérations *a priori* : celle des relations de proximité, tandis que le travail final d'Hermann Weyl sur le problème de l'espace nous montre à l'œuvre une forme nuancée d'« idéalisme » limitée à la sphère de proximité, et qui détermine « *a priori* » la structure de groupe caractérisant univoquement l'espace.

4. Annexe :

Traduction des deux principaux textes d'*Espace-Temps-Matière* où Hermann Weyl thématise sa conception des rapports entre la philosophie, les sciences de l'espace et leurs histoires respectives.

Nous présentons ici la traduction des deux seuls textes d'*Espace-Temps-Matière* où Hermann Weyl thématise sa conception des rapports entre la philosophie, les sciences de l'espace et leurs histoires respectives. Ces traductions étaient trop longues pour figurer en note de bas de page. Elles sont d'Alain Michel et figurent respectivement dans [Michel 2006, 212] et [Michel 2006, 215]. Nous les reproduisons de par l'importance que ces textes pour la compréhension globale des rapports que Weyl entretient avec la philosophie.

Le premier texte traduit apparait dans la quatrième édition de l'ouvrage [RZM 1921, 133-134]. Il clôt le chapitre 2, et donc la partie purement mathématique de l'ouvrage où, en fonction de la répartition des rôles qu'Hermann Weyl attribue aux mathématiques et à la physique, se trouve le cœur des composantes *a priori* (« essentielles » préfère dire Hermann Weyl ci-dessous) de la notion d'espace. Voici la traduction :

> Les recherches sur l'espace qui ont été menées dans ce chapitre II ont paru à l'auteur offrir un bon exemple de l'analyse de l'essence [Wesenanalyse] qui forme l'objet de la philosophie de Husserl, un exemple typique des cas dans lesquels nous considérons des modes non immanents. Le développement historique du problème de l'espace montre à quel point il est difficile aux êtres humains englués dans la réalité extérieure d'atteindre une conclusion déterminée. Une longue phase de l'évolution mathématique, à savoir le grand développement de la géométrie d'Euclide à Riemann, la découverte des faits physiques de la nature et de leurs lois à partir de Galilée, en même temps que les impulsions incessantes données par de nouveaux faits empiriques, finalement le génie de grands individus -Newton, Gauss, Riemann, Einstein- tous ces facteurs étaient nécessaires pour nous libérer des caractéristiques extérieures, accidentelles, non essentielles, qui autrement nous auraient maintenus captifs. Il est certain que, une fois qu'elle a adopté le véritable point de vue, la raison s'inonde de lumière, reconnait et juge ce qui lui est en soi intelligible. Cependant, bien que la raison soit, pour ainsi dire, toujours consciente de ce point de vue dans tout le développement du problème, elle n'a pas le pouvoir de pénétrer en lui par illumination. On doit adresser ce reproche à l'impatience de ces philosophes qui croient décrire adéquatement l'essence (le mode d'existence) à partir de simples actes de présentation typique [exemplarischer Vergegenwärtigung]. Ils ont raison en principe. Mais combien ils ont tort, si on se place du point de vue de la nature humaine ! Le problème de l'espace est en même temps un exemple très instructif de cette question de phénoménologie qui semble à l'auteur de la plus grande importance, à savoir dans quelle mesure la détermination des traits essentiels perceptibles dans la conscience exprime la structure particulière du domaine d'objets présentés, et dans quelle mesure elle relève d'une simple convention.

Traduction par Alain Michel de :

> Die im II. Kap. angestellten Untersuchungen über den Raum scheinen mir ein gutes Beispiel für die von der phänomenologischen Philosophie (Husserl) angestrebte Wesenanalyse zu sein; ein Beispiel, das typisch ist für solche Fälle, wo es sich um nicht-immanente Wesen handelt. Wir sehen da an der historischen Entwicklung des Raumproblems, wie schwer es uns in der Wirklichkeit befangenen Menschen wird, das Entscheidende, zu treffen. Eine lange mathematische Entwicklung, die große Entfaltung der geometrischen Studien von Euklid bis Riemann, die physikalische Durchdringung der Natur und ihrer Gesetze seit Galilei mit all ihren immer erneuerten Anstößen aus der Empirie, endlich das Genie einzelner großer Geister –Newton, Gauß, Riemann, Einstein – war erforderlich, um uns von den äußerlichen, zufälligen, nicht wesenhaften Merkmalen loszureißen, an denen wir sonst hängen geblieben wären. Freilich: ist einmal der wahre Standpunkt gewonnen, so geht der Vernunft ein Licht auf, und sie erkennt und anerkennt das ihr aus-sich-selbst-Verständliche; dennoch hatte sie (wenn sir natürlich auch in der ganzen Entwicklung des Problems immer „dabei war") nicht die Kraft, es mit einem Schlage zu durchschauen. Das muß der Ungeduld der Philosophen entgegengehalten werden, die da glauben, auf Grund eines einzigen Aktes exemplarischer Vergegenwärtigung das Wesen adäquat beschreiben zu können; sie haben prinzipiell recht, menschlich aber so unrecht. Das Beispiel des Raumes ist zugleich sehr lehrreich für diejenige Frage der Phänomenologie, die mir die eigentlich entscheidende zu sein scheint: inwieweit die Abgrenzung der dem Bewußtsein aufgehenden Wesenheiten eine dem Reich des Gegebenen selbst eigentümliche Struktur zum Ausdruck bringt und inwieweit an ihr bloße Konvention beteiligt ist.

On perçoit dans ce passage de nombreux traits de la pensée d'Hermann Weyl qui ont été rapportés dans notre partie I.2.

- L'appel à la phénoménologie husserlienne pour penser son travail conceptuel sur le problème de l'espace

- La faiblesse de la nature humaine qui ne nous permet pas de saisir immédiatement au sein de notre notion d'espace ce qui est « essentiel » (ce terme joue ici un rôle comparable à ce que nous avons appelé les composantes *a priori* de cette notion) et ce qui relève de conventions, de circonstances accidentelles, etc.

- Enfin, on y voit le recours à l'histoire des sciences pour pallier cette insuffisance de la nature humaine. La fin du texte donne les clefs pour concilier la forme d'idéalisme que défend Weyl en s'inspirant de Husserl et de l'idéalisme allemand en général, et son pragmatisme historique qui le pousse à toujours partir du développement concret des sciences. L'idée est simplement que le développement historique de la science épure progressivement les notions fondamentales (espace, temps, matière) des aspects conventionnels ou accidentels dont elles étaient pourvues pour n'y laisser que la partie essentielle (*a priori*) que la raison reconnait après coup comme lui étant immanente. C'est seulement à l'issue de ce mouvement historique d'épuration que « la raison s'inonde de lumière ».

Le deuxième texte est extrait de l'introduction et apparait dès la 1ère édition en [RZM 1918, 2] :

La philosophie, les mathématiques et la physique ont chacune une part dans les problèmes qui se présentent ici. Nous nous intéresserons avant tout à l'aspect mathématique et physique de ces questions. Je ne toucherai que superficiellement aux implications philosophiques, pour la raison simple que, dans cette voie, on n'a rien atteint de définitif, et que, pour ma part, aux questions épistémologiques qui se posent, je ne suis pas en mesure de donner les réponses que ma conscience m'autoriserait à soutenir. Les idées développées dans cet ouvrage ne sont pas le résultat d'une spéculation sur les fondements de la connaissance philosophique, mais elles ont été développées dans le cours ordinaire du traitement de problèmes physiques concrets –problèmes qui ont émergé dans le développement de la science, un développement rapide qui a fait explosé l'ancienne coquille devenue trop étroite. Cette révision des principes fondamentaux ne fut entreprise que plus tard, et seulement dans la mesure exigée par les idées nouvellement formulées. Dans l'état actuel des choses, il n'y a pas d'autre alternative pour les différentes sciences que de procéder dogmatiquement selon leur propre voie, c'est-à-dire de suivre avec confiance les chemins dans lesquels des motifs raisonnables, propres à leurs méthodes particulières et à leurs limites spécifiques, les ont conduites. La tâche de porter la lumière philosophique sur ces questions est cependant une tâche importante, parce qu'elle est radicalement différente de celle qui revient à l'ensemble des sciences individuelles. C'est ici que le philosophe doit exercer son droit de regard (jugement). S'il ne perd pas de vue les frontières que tracent les difficultés immanentes à ces problèmes, il peut guider, mais il ne doit pas entraver le progrès des sciences dont le champ est limité au domaine des objets concrets.

Néanmoins, je vais commencer par quelques réflexions de caractère philosophique[…] »

Traduction par Alain Michel de :

An den Problemen, die hier aufgeworfen werden, haben Philosophie, Mathematik und Physik ihren Anteil. Uns soll aber vor allem die mathematisch-physikalische Seite der Fragen beschäftigen; auf die philosophische werde ich nur ganz nebenher eingehen, aus dem einfachen Grunde, weil in dieser Richtung etwas irgendwie Endgültiges bisher nicht vorliegt und ich selber auch nicht imstande bin, auf die hergehörigen erkenntnistheoretischen Fragen solche Antworten zu geben, die ich vor meinem Erkenntnisgewissen voll verantworten könnte. Die Ideen, welche es hier darzustellen gilt, sind nicht aus einer spekulativen Versenkung in die Grundlagen physikalischer Erkenntnis hervorgegangen, sondern haben sich im Ausbau der lebendig vorwärts drängenden Wissenschaft, der die alte Schale zu eng wurde, an konkreten physikalischen Problemen entwickelt; eine Revision der Prinzipien wurde jedesmal erst nachträglich vollzogen und nur so weit, als es gerade die neu aufgetauchten Ideen erheischten. Wie die Dinge heute liegen, bleibt den Einzelwissenschaften nichts anderes übrig, als in diesem Sinne dogmatisch zu verfahren, d. h. in gutem Glauben den Weg zu gehen, auf den sie durch vernünftige, im Rahmen ihrer eigentümlichen Methoden emporkommende Motive gedrängt werden. Die philosophische Klärung bleibt eine große Aufgabe von völlig anderer Art, als sie den Einzelwissenschaften zufällt; da sehe nun der Philosoph zu; mit den Kettengewichten der in jener Aufgabe liegenden Schwierigkeiten behänge und behindere man aber nicht das Vorwärtsschreiten der konkreten Gegenstandsgebieten zugewandten Wissenschaften.

Gleichwohl beginne ich mit einigen philosophischen Erörterungen.

Ce texte illustre avec force le double discours d'Hermann Weyl qui, d'une part, prend acte de l'émancipation des sciences individuelles à l'égard de la philosophie pour ne pas être « entravées » et, d'autre part, indique que cet état de fait est peut-être seulement dû à une immaturité de la réflexion philosophique qui devrait, de droit, précéder la science. Hermann Weyl indique bien qu'il a pris le seul chemin valable dans l'état actuel des choses : poser les problèmes philosophiques en partant des résultats et questions concrets posés par l'avancée des sciences. Hermann Weyl semble regretter cet état de fait et insiste sur la tâche singulière qui est celle de la philosophie. Il ne se prononce cependant pas définitivement sur la possibilité que cette forme de « retard » de la philosophie sur les sciences puisse s'estomper dans un futur plus ou moins proche, ou s'il est le résultat inévitable d'une différence essentielle entre les modes de rapports à l'histoire de ces deux champs du savoir.

Partie II Réflexions philosophiques sur l'aspect mathématique des relations spatiales

1. Délimitation de la notion mathématique d'espace

a. Les trois niveaux d'analyse de la notion d'espace : Le mathématique, le physique et le phénoménal

Les réflexions sur la notion d'espace dans *Espace-Temps-Matière* concernent les interactions entre trois niveaux de réalité : le mathématique, le physique et un troisième auquel Hermann Weyl se réfère par de multiples termes comme « la perception »[Wahrnehmung][98,] « le vécu perceptif » [Wahrnehmungerlebnis][99], l' « intuitif » [Anschaulich][100], le « vécu » [erlebnis][101], le « vécu de conscience » [Bewutsstseinserlebnis][102] ou plus rarement le « phénoménal » [phänomenal][103]. Ces trois niveaux interviennent aussi dans la formulation du problème de l'espace dans l'*Analyse Mathématique du problème de l'espace*[104] et se retrouvent également dans *Le Continu*

[98] [RZM 1919, 2;3;75;89;143], [Weyl 1918a, 1;66;69]

[99] [Weyl 1918a, 69;72]

[100] [RZM 1919, 3;60], etc.

[101] [Weyl 1918a, 69-72], [RZM 1919, 3-7]

[102] [Weyl 1918a, 67], [RZM 1919, 3]

[103] [Weyl 1918a, 67, 69, 70] Weyl emploie ce terme quand il parle du vécu de conscience lié à l'expérience du temps plutôt que de l'espace. Ce terme est lié bien sûr à Husserl et dans une autre mesure à Bergson.

[104] [Weyl 1923, 1] D'un texte à l'autre, les trois niveaux constitutifs du problème de l'espace se décalent sans que cela interfère en profondeur sur les motifs et enjeux philosophiques impliqués. Ainsi, dans *L'Analyse*

quand Hermann Weyl exprime le *problème du continu* comme une analyse de la façon dont s'articulent les notions mathématique, physique et perceptive de la continuité. Si ce schéma tripartite est récurent c'est qu'il correspond à la manière dont Hermann Weyl pense les objectifs et les enjeux de la théorie de la connaissance[105]. Il s'agit à chaque fois de distinguer, au sein de la connaissance scientifique, entre d'une part le mathématique, composé de constructions rationnelles qui se développent de manière déductive et reposent sur des exigences de la raison, d'autre part le physique, c'est-à-dire les éléments de la connaissance qui dépendent de la mesure contingente des objets du monde et des lois générales d'interactions de la matière qui sont découvertes empiriquement, et enfin l'intuitif, au sens de ce qui a trait à la forme immédiate de notre rapport au monde comme individus percevants.

Ces trois aspects qui doivent être distingués par la théorie de la connaissance peuvent être appliqués à la notion d'espace(-temps). L'espace(-temps) renvoie d'abord à une réalité mathématique, i.e. au corps des constructions rationnelles qui se développent de façon déductive pour former la (chrono-)géométrie. Les *Eléments* d'Euclide ou *les Fondements de la géométrie* de Hilbert sont de ce point de vue les modèles exemplaires d'une telle géométrie comme science mathématique de l'espace[106]. Il renvoie ensuite à une réalité physique, celle des relations spatiales (en particulier métriques) mesurées effectivement dans le monde et dépendant des caractéristiques physiques des corps et des lois de leurs interactions. Enfin, il renvoie à une réalité phénoménale, celle des relations spatiales « intuitives » qui, tout en étant les produits directs de la constitution psycho-physiologique de notre appareil perceptif, nous sont données à la conscience *immédiatement* si bien qu'elles ne doivent pas être confondues avec la réalité matérielle de l'appareil perceptif lui-même.

b. De l'espace subjectif intuitif à l'espace objectif mathématisé, un solipsisme surmonté

Ces trois pôles ne jouent cependant pas un rôle similaire. Le mathématique et le physique sont étroitement corrélés en tant qu'ils sont co-constitutifs du contenu objectif de

---

mathématique du problème de l'espace, les trois niveaux qui apparaissent en première page sont : 1) l'espace lui-même (qu'on peut identifier avec le niveau mathématique), 2) sa structure métrique (qui, comme le suggère le texte, est le lieu où les considérations physiques vont apparaître), et 3) son contenu matériel avec ses quale (qui correspond à ce qui peut être l'objet l'intuition au niveau de la perception immédiate).

[105] Cf. plus haut sur ce que nous en avons dit dans notre paragraphe I.2.c.

[106] [Weyl 1923, 3]

la notion scientifique d'espace, de ce qu'on peut appeler « l'espace mathématisé »[107]. Par contre, l'intuition perceptive ne joue, vis-à-vis des concepts scientifiques, qu'un rôle négatif. La notion d'espace n'acquiert un statut scientifique qu'en rompant avec l'espace intuitif. Faisons attention à ce que cela signifie. En vertu de notre adhésion à l'interprétation idéaliste de la pensée d'Hermann Weyl (cf. I.2.c), nous pensons que le sujet connaissant joue un rôle primordial pour Weyl dans la constitution du concept scientifique d'espace. Mais en aucun cas le concept scientifique d'espace ne doit pour autant être confondu avec l'espace intuitif tel *qu'il est vécu par le sujet individuel d'une perception.*

Comme l'indique le terme « intuitif », toute la connaissance de l'espace commence par le rapport immédiat qu'entretient le sujet percevant individuel à la réalité spatiale et à son contenu. Ainsi, dans une esquisse de théorie de la connaissance fortement influencée par la figure de Husserl qu'Hermann Weyl place dans l'introduction d'*Espace-Temps-Matière*, il débute par la description d'un solipsisme qui est poussé à son comble puisque Weyl va jusqu'à mettre en doute l'existence des objets transcendants à la conscience, et l'existence du monde extérieur en général, aboutissant à :

> l'interprétation des événements du monde comme un jeu de la conscience produit par l'Ego[108]

Nous ne pouvons avoir de certitude immédiate que concernant la réalité immanente à la conscience car celle-ci est un *absolu*, c'est-à-dire que tout son être s'identifie avec son apparaître. A l'opposé, les objets transcendants ne peuvent avoir qu'une réalité *phénoménale*, ce qui signifie ici qu'il y a un écart essentiel entre leur être et leur apparaître. Chacune de leurs apparitions n'est que le signe d'un des aspects de leur être. Cet écart entre l'être et l'apparaître des objets transcendants permet le doute et le regard philosophique (qu'Hermann Weyl devrait précisément appeler un regard « husserlien » en référence à la notion husserlienne d'« épochè ») Ce regard consiste à mettre en suspens notre jugement sur l'existence des objets transcendants. Si nous transposons cela sur le plan de la notion d'espace, le seul accès immédiat que nous en ayons consiste en des intuitions perceptives individuelles de relations spatiales entre des objets donnés *in concreto*. L'univers réel et commun à tous les êtres, dans lequel nous avons l'habitude de nous représenter les événements physiques, ou tout simplement nos actions communes quotidiennes, est du

---

[107] Hermann Weyl n'a pas de terminologie fixe pour désigner l'espace de la science qui comprend à la fois les niveaux mathématique et physique. Il parle parfois dans les termes d'une opposition entre le champ intuitif et le champ conceptuel. Il emploie aussi souvent, quand il oppose l'espace intuitif à celui de la science, le couple qualité/quantité. L'espace « qualitatif » connu par le biais de qualia est opposé à un espace « quantitatif » issu de déterminations numériques. Cf. ci-dessous II.1.c.

[108] [RZM 1918, 4], notre traduction :

> „die Auffassung des Weltgeschehens als eines vom Ich produzierten Bewußtseinsspiels"

côté du transcendant. Son existence n'est pas une donnée immédiate de la conscience et peut donc être mise en doute.

Mais ce solipsisme de Weyl, tout comme ceux de Descartes ou de Husserl, n'a rien d'un scepticisme. C'est un solipsisme méthodologique qui doit être surmonté. Là où le Dieu cartésien garanti la véracité de nos idées, et par suite l'existence du monde, c'est la construction rationnelle de la science qui joue chez Weyl le rôle de décloisonnement du sujet individuel pour parvenir à la connaissance du monde transcendant et à la garantie de son existence objective. La construction scientifique procède par une méthode qui consiste à se libérer de la singularité du point de vue du sujet individuel percevant, pour parvenir à un point de vue objectif. Et cette objectivisation passe par un changement de perspective qui consiste à remplacer les propriétés perceptives perçues immédiatement par la construction conceptuelle qui trouve son mode de développement le plus achevé dans l'utilisation des mathématiques.

Appliqué à la notion d'espace, cette objectivisation aboutit à construire un « unique univers réel et cohérent » dont la nature va changer par rapport à l'espace intuitif de la perception :

> Tout comme le temps est la forme du « flux » de la conscience, on peut à bon droit affirmer que l'espace est la forme de la réalité corporelle. Tous les aspects des choses corporelles qui sont donnés dans les actes de la perception extérieure, par exemple la couleur, portent en eux la séparation de l'extension spatiale. Mais c'est seulement lorsque, à partir de toutes nos expériences, on construit un unique monde réel et cohérent, que l'extension spatiale qui nous est donnée à travers chaque [acte de] perception devient une partie d'un seul et même espace, à partir duquel toute chose s'étend. *Cet espace est la forme du monde extérieur ; c'est-à-dire : toute chose corporelle peut tout aussi bien être à un autre emplacement spatial que celui où elle est précisément, sans qu'elle ne devienne autre qualitativement*[109]

C'est l'appareil conceptuel apporté par les mathématiques qui va permettre ce changement radical de regard sur l'espace et va permettre son unification. Cela passe d'abord par une métamorphose de la façon dont est pensée la continuité, comme nous

---

[109] Notre traduction de [RZM 1918, 5]:

> „Wie die Zeit die Form des Bewußtseinstromes, so, darf man mit Fug und Recht behaupten, ist der *Raum* die Form der körperlichen Wirklichkeit. Alle Momente körperlicher Dinge, wie sie in den Akten äußerer Wahrnehmung gegeben sind, Farbe z. B., haben das Auseinander der räumlichen Ausbreitung an sich. Aber erst indem sich aus allen unseren Erfahrungen eine einzige zusammenhängende reale Welt aufbaut, wird die in jeder Wahrnehmung gegebene räumliche Ausbreitung zu einem Teil des einen und selben Raumes, der alle Dinge umspannt. Dieser Raum ist *Form* der Außenwelt; das will sagen: jedes körperliche Ding kann, ohne irgendwie inhaltlich ein anderes zu sein als es ist, ebensogut an jeder anderen Raumstelle sein als gerade an dieser. Damit ist zugleich die *Homogenität* des Raumes gegeben, und hier liegt die eigentliche Wurzel des *Kongruenzbegriffs*.

allons le voir immédiatement. L'écart entre l'espace intuitif et l'espace mathématisé n'est donc pas le signe d'un échec de la science de l'espace mais est au contraire un réquisit pour pouvoir construire cette science comme une *théorie physique* qui vise à connaître le transcendant en le représentant par concepts et non pas comme une phénoménologie de la perception, simple description de l'immanent[110].

c. Continuum intuitif et continuum mathématique : la thèse atomistique

Cette rupture assumée entre le niveau intuitif et le niveau conceptuel de la science est déjà visible au sein de la notion de continuité, notion fondamentale pour la science de l'espace. C'est un supposé constant *d'Espace-Temps-Matière* qui n'est développé pleinement que dans l'autre grande monographie de 1918, *Le Continu.* Dans le second chapitre de ce dernier ouvrage[111], Hermann Weyl caractérise le type de continuité propre aux continua de la perception. Les continua intuitifs, qu'ils soient de nature spatiale ou temporelle[112], ne sont pas composés de points mais sont continus au sens où ils sont des totalités qui précèdent leurs parties. Les frontières entre deux parties d'un continuum intuitif sont floues. Elles appartiennent indistinctement aux deux parties. Ce n'est de plus pas directement l'espace lui-même qui est l'objet d'une expérience vécue mais des objets concrets entretenant des relations spatiales particulières, et perçus par le biais de leurs propriétés qualitatives perçues sous la forme de qualia[113]. Hermann Weyl évoque l'expérience perceptive que nous vivons quand nous voyons un crayon reposer sur une table pendant un certain temps[114].

Au contraire du continu intuitif, le continu mathématisé est véritablement *constitué* de points rigoureusement isolés, objets idéaux dont la localisation exacte est au fondement de la possibilité d'une mesure physique arbitrairement précise. L'ensemble des points est

---

110 [Weyl 1918a, 37-38, 71, 83]

111 Cf. le chapitre 6 du *Continu*, « continu intuitif et continu mathématique » [Anschauliches und mathematisches Kontinuum] c'est-à-dire [Weyl 1918a, 65-74]

112 Dans le passage concerné, Hermann Weyl traite avant tout de l'expérience intuitive du *temps* en référence à Bergson. L'intuition du temps et l'intuition de l'espace sont cependant étroitement corrélées dans l'expérience du mouvement. Certains passages d'Hermann Weyl suggèrent une relation complexe entre ces deux types d'intuition, qui repose sur la distinction traditionnelle entre une intuition interne et une intuition externe. Ces passages sont cependant trop allusifs pour que nous puissions développer ce point plus avant.

113 L'idée est déjà présente dans [Weyl 1918a] et [RZM 1919] mais le terme latin apparait dans [Weyl 1923, 1].

114 [Weyl 1918a, 66] Dans ce passage se trouvent mêlées intuition de l'espace et intuition du temps dans l'expérience de cette forme limite de mouvement qu'est le repos.

ensuite pourvu de structures géométriques (notamment les structures affines et métriques) qui se laissent elles-aussi exprimer par des quantités exactes. Cette quantification est aussi au fondement de la possibilité d'une mesure physique. La décomposition de l'espace en points isolés est ce qu'Hermann Weyl appelle la *thèse atomistique*. Elle est une hypothèse usuelle de la géométrie à laquelle il adhère dans *Le Continu* tout comme dans *Espace-Temps-Matière*. Cette hypothèse ne sera véritablement abandonnée au sein d'une tentative sérieuse de fondation mathématique du continu qu'avec les mathématiques intuitionnistes de Brouwer auxquelles Hermann Weyl s'est joint quelques temps pendant les années 1920-1921. Ce moment dans l'évolution intellectuelle d'Hermann Weyl n'a cependant laissé que peu de traces dans *Espace-Temps-Matière* et c'est donc plutôt la thèse atomistique qu'il faut développer pour comprendre le projet d'ensemble de ce texte.

Ainsi, le type de continuité propre aux mathématiques atomistiques n'est pas expérimenté par le sujet psychologique d'une perception mais est le fruit d'une construction conceptuelle qui s'avère un processus d'idéalisation et d'objectivation. Au vu de la thèse atomistique, la science du continu ne saurait être une phénoménologie de la continuité perceptive, de la même façon que nous avons vu que la science de l'espace en général ne pouvait être une phénoménologie du vécu perceptif des relations spatiales. Ainsi, si le rapport intuitif à l'espace est premier dans l'ordre logique de notre connaissance (et cette primauté est le sens même du mot 'intuition'), Il faut toutefois effectuer un changement radical de perspective à partir de ce point de départ pour atteindre la notion scientifique d'espace. Inversement, le scientifique doit accepter avec humilité que son concept d'espace ne capture pas l'essence de l'espace telle qu'elle nous est révélée par notre intuition[115]. Il reste à savoir comment peut s'effectuer la transition entre ces deux niveaux essentiellement distincts de la notion d'espace : le niveau intuitif de la perception et le niveau conceptuel des mathématiques.

d. Le problème philosophique de l'espace laissé à l'état d'ébauche

Comprendre en profondeur et justifier la transition du point de vue intuitif au point de vue conceptuel de la science, et en particulier comprendre comment, à partir de la répétition de nos actes perceptifs individuels, nous pouvons inférer l'existence d'une seule et même réalité spatiale ayant des propriétés objectives, est une tâche primordiale pour la philosophie. Cela fait partie de ce qu'Hermann Weyl nomme le « problème philosophique de l'espace »[116], vaste problème qui regroupe toutes les interrogations ontologiques et

[115] [RZM 1919, 23]

[116] [Weyl 1923, 1-2]

épistémologiques à propos de l'espace : le lien entre les trois niveaux dont avons parlés au II.1.a., l'origine et le statut métaphysique de l'espace ou encore le lien entre les divers sens (vue, ouïe…) qui participent aux qualités sensibles d'où émergent nos intuitions spatiales.

Si le sous-problème précis du lien entre le niveau perceptif et le niveau mathématisé, est formulé à plusieurs reprises dans les écrits de Weyl de la période 1917-1923, jamais notre auteur ne tente de le résoudre pleinement. Il se contente des quelques indications que nous avons données au paragraphe précédent, de l'appel à Husserl, et évoque le fait que, pour constituer des *objets* de la perception, première tape du mouvement d'objectivation, on ait besoin de remarquer que le sentiment de la différence entre nos actions et nos passions est essentiel à établir un pont entre la réalité intérieure d'abord purement temporelle et la réalité corporelle extérieure d'abord purement spatiale[117]. Il repousse cependant toujours la tâche de l'explicitation complète du passage du point de vue intuitif au point de vue conceptuel comme étant une tâche moins importante pouvant être au moins partiellement détachée de son travail actuel[118]. La tâche qui lui importe dans l'urgence est le problème *mathématique* de l'espace et la partie du problème philosophique de l'espace limitée à l'étude du rapport, au sein de l'espace mathématisé, entre le mathématique et le physique. Nous avançons deux hypothèses pour expliquer cette mise à l'écart par Hermann Weyl de la résolution complète du problème philosophique de l'espace.

Notre première hypothèse consiste à interpréter pourquoi il utilise le terme « problème *philosophique* de l'espace » par opposition au « problème *mathématique* de l'espace ». Cette opposition ne signifie pas que les enjeux philosophiques se trouveraient seulement dans le premier problème. Il faut plutôt comprendre que les qualificatifs de

[117] [RZM 1918, 5-6]

[118] Ainsi, dans [Weyl 1918a, 74], Weyl repousse-t-il le sous-problème qui consiste à savoir comment comprendre l'articulation entre le continu au sens mathématique du terme et le continu intuitif caractéristique des continua de la perception :

> Les réflexions livrées dans ce paragraphe ne sont certainement qu'un substitut peu instructif à une véritable philosophie du continu. Puisque nous ne disposons de rien de plus pénétrant, et que notre tâche n'est pas épistémologique [erkenntnistheoretischem] mais mathématique, nous pouvons en rester là..

Notre traduction de :

> Die in diesem Paragraphen angestellten Überlegungen sind gewiß nur ein wenig aufschlußreiches Surrogat für eine echte Philosophie des Kontinuums. Da nichts Eindringendes darüber vorliegt und unsere Aufgabe hier nicht auf erkenntnistheoretischem, sondern auf mathematischem Gebiete liegt, mag es dabei aber sein Bewenden haben.

Dans *l'Analyse mathématique du problème de l'espace* [Weyl 1923, 3], Hermann Weyl indique qu'il ne traitera pas du problème philosophique de l'espace mais s'intéressera plutôt à l'analyse mathématique de la *structure de l'espace*, « parce que cette étude fournit un rendement bien plus important » [die eine wesentlich reichere Ausbeute liefert]

« philosophique » et de « mathématique » renvoient aux niveaux de connaissance technique sur les fondements de la géométrie et sur la théorie de la relativité qui sont réclamés par la compréhension de ces problèmes. La partie du problème philosophique de l'espace que Weyl met de côté est relativement indépendante du contenu précis des théories géométriques et physiques. Elle demande en outre des outils proprement philosophiques comme l'étude des qualia liés à la perception de l'espace. En tant que tel, il s'agit d'un problème qu'on rangerait selon la terminologie française dans la catégorie de la « théorie de la connaissance ». A l'opposé, l'étude des liens entre les niveaux mathématique et physique de la notion d'espace, ainsi que le problème mathématique de l'espace en son sens strict, ne prennent sens qu'à partir d'une connaissance en profondeur du contenu des nouvelles théories géométriques et physiques. En tant que tel, il s'agit d'un authentique problème d'*épistémologie* qui est en adéquation avec le type d'approche de la philosophie que pratique Hermann Weyl depuis l'intérieur des théories scientifiques.

Ensuite, en lien avec notre première hypothèse, il semble que c'est dans l'actualité de la théorie de la relativité générale d'Einstein que réside l'urgence dont parle Hermann Weyl d'éclaircir les nouveaux rapports qu'entretiennent le mathématique et le physique au sein de la notion scientifique d'espace. La théorie d'Einstein n'a pas apporté d'éclairage nouveau sur les rapports entre l'espace intuitif de la perception et l'espace mathématisé de la science, mais elle a par contre révolutionné en profondeur les rapports du mathématique et du physique. Puisque, selon Weyl, les problèmes épistémologiques doivent trouver leurs solutions dans un dialogue avec les théories scientifiques dans leur évolution, l'émergence de la théorie d'Einstein est le signe que la pensée a atteint un stade suffisamment mature pour qu'on puisse exposer des résultats philosophiques solides sinon définitifs sur les rapports entre le mathématique et le physique dans la constitution de la notion d'espace[119].

Il était important de remarquer qu'Hermann Weyl laisse une partie du problème philosophique de l'espace à l'état d'ébauche, à savoir le passage de l'espace intuitif qualitatif à l'espace mathématisé, dans la mesure où, premièrement, cette attitude n'est pas celle d'autres penseurs scientifiques qui ont réfléchi sur le même thème[120] et, deuxièmement, parce que cette attitude se pose contre celle qu'adoptera Hermann Weyl lui-même pendant les quelques mois de 1920-1921 où il adhérera à l'intuitionnisme mathématique de L.E.J Brouwer. Plus précisément, les mathématiques intuitionnistes ne développent pas une

[119] [RZM 1919, 2]

[120] L'exemple type que nous avons en tête est celui d'Henri Poincaré qui, lorsqu'il introduit la notion d'espace représentatif, proche de l'espace intuitif d'Hermann Weyl, dans le quatrième chapitre de *la Science et l'hypothèse*, ne le fait certainement pas uniquement pour ajouter ensuite qu'il est radicalement distinct de l'espace mathématique et pour le mettre aussitôt à l'écart. Poincaré thématise véritablement le lien (qui est une genèse) qui mène de l'espace de la représentation à l'espace mathématisé.

théorie du passage entre les deux sphères de connaissances de l'espace (intuitive et conceptuelle) mais elles œuvrent plutôt à un rapprochement de ces deux sphères en estompant l'écart entre le mathématique et l'intuitif (au sens développé ci-dessus). Ce rapprochement provient d'un travail conceptuel de fondement des mathématiques. Cette période n'a été cependant qu'une parenthèse dans la vie intellectuelle d'Hermann Weyl et dont les traces dans *Espace-Temps-Matière* ne sont pas bien nettes.

On ne peut toutefois ignorer totalement ce moment de l'évolution intellectuelle de Weyl. S'il a pu rejoindre le projet de Brouwer avec autant d'enthousiasme, c'est que l'approche radicale de Brouwer répondait à une forme d'insatisfaction ou peut-être plutôt à une conscience par Weyl du fait que, en ayant laissé à l'état d'ébauche le problème philosophique de l'espace, sa pensée épistémologique était encore insuffisante pour rendre compte des aspects intuitifs de la continuité et de la façon dont des mathématiques rigoureuses peuvent émerger de ce premier état de la connaissance. Tout en conservant la thèse atomistique dans tout *Espace-Temps-Matière*, on verra qu'Hermann Weyl est toujours préoccupé pour munir le continuum des points isolés de structures de « voisinages » qui viennent rompre l'isolement radical initial des points du continuum. On reconnait le schéma général de la topologie ensembliste qu'Hermann Weyl employait, même si cela ne suffisait pas pour lui à résoudre le problème du continu.

Pour résumer, on perçoit à la fois qu'Hermann Weyl reste fidèle pendant la période 1917-1923 (en excluant son moment intuitionniste) à la thèse atomistique pour sa force explicative des relations entre le mathématique et le physique, mais que le fait d'avoir laissé à l'état d'ébauche le problème philosophique de l'espace pour s'occuper d'un problème épistémologique « plus urgent », laisse toujours Hermann Weyl prudent à l'égard de sa propre méthode. Le fait de munir *a posteriori* un continuum de points isolés de structures de voisinages lui semble finalement un pis-aller qu'il faut accepter de façon un peu abrupte, le temps de l'attente de la maturation complète du problème philosophique de l'espace.

e. La géométrie mathématique comme premier moment de la construction scientifique de l'espace

Dans ce qui suit, nous suivrons l'approche de Weyl majoritaire pendant la période 1917-1923 en ne nous référerons que très peu à ce qu'il appelle l'« espace intuitif ». Toute notre attention portera sur les nouvelles articulations que la théorie d'Einstein, et les développements de la géométrie différentielle qui font suite aux travaux de Bernhard Riemann, nous obligent à concevoir entre les aspects mathématique et physique de la notion d'espace. Toute la première partie de notre travail considérera de façon isolée la notion *mathématique* d'espace de façon préalable à toute application physique, i.e. à toute considération de la matière et des lois de son mouvement et ses interactions.

Un tel plan d'étude est conforme à l'approche de Weyl et est permis par le fait que le mathématique constitue un premier moment relativement indépendant dans la construction de la science de l'espace, comme en témoigne le découpage d'*Espace-Temps-Matière* entre les deux premiers et les deux derniers chapitres, découpage qui s'impose d'ailleurs dans la plupart des ouvrages traitant de la théorie de la relativité générale, y compris dans l'article fondateur de la théorie[121].

Ce découpage fonctionne comme suit. Il s'agit dans un premier temps d'introduire certaines notions géométriques purement mathématiques : espaces vectoriels, tenseurs, forme quadratique, espaces de Riemann, densités tensorielles, connexion affine, courbure de Riemann, etc. Elles sont traitées de façon entièrement déductive. C'est seulement dans un deuxième temps (qui correspond aux deux autres chapitres d'*Espace, Temps, Matière*) qu'Hermann Weyl introduit la matière et ses lois et la façon dont les structures géométriques y prennent placent, les objets physiques étant eux-mêmes porteurs d'une nature géométrique. Il est important de comprendre qu'en rentrant dans les considérations physiques des deux derniers chapitres, Hermann Weyl ne quitte pourtant pas (du moins tant qu'il ne s'occupe que de la gravitation) le domaine de la géométrie au sens d'une science de l'espace. Rappelons en effet que la théorie de la relativité générale rend compte des interactions gravitationnelles par le biais de modifications des structures de l'espace. La matière d'une certaine manière « déforme » l'espace et c'est cette déformation de l'espace qui se manifeste par ce que l'on considérait auparavant comme une force, la force

[121] Le texte d'Einstein de 1916, qui donne une vue d'ensemble de sa nouvelle théorie, et avait enthousiasmé Hermann Weyl, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* [Einstein 1916] est composé en trois parties. Dans la première partie « A. Considérations fondamentales sur le principe de relativité » [A. Prinzipielle Erwägangen zum Postulat der Relativität], Albert Einstein expose le rôle des systèmes de coordonnées et du principe de relativité dans la théorie de la relativité restreinte et prône, par des arguments épistémologiques et expérimentaux (principe d'équivalence), la nécessité d'élargir ce principe par le biais de la covariance généralisée. Mathématiques et physique sont ici mêlées confusément suite à des liens non encore parfaitement clarifiés entre la notion mathématique de système de coordonnées et la notion physique de référentiel. Les deux autres parties : « B. Outils mathématiques pour l'établissement d'équations généralement covariantes » [B. Mathematische Hilfmittel für die Aufstellung allgemein kovarianter Gleichungen] et « C. Théorie du champ de gravitation » [C. Theorie des Gravitationsfeldes] suivent alors un découpage entre outils mathématiques préliminaires [Mathematische Hilfmittel], et étude proprement physique de l'espace et de ses relations à la gravitation.

Il y a donc bien une analogie avec le découpage d'*Espace-Temps-Matière* entre les deux premiers et les deux derniers chapitres. Sans doute la possibilité même d'un tel découpage est suggérée par la genèse historique de la théorie, où la création des concepts mathématiques nécessaires à sa formulation ont précédé la partie physique de la théorie, parfois de plusieurs décennies. Cf. ce que nous avons dit en I.1.c. sur l'anticipation des mathématiques sur le physique.

gravitationnelle, dans la physique newtonienne. La géométrie mathématique se trouve donc complétée par une géométrie physique, et ce n'est qu'ensuite qu'on peut procéder à l'exposition des éventuelles autres lois non spatiales de la physique. Par « lois non spatiales » nous voulons signifier non pas des lois physiques qui traiteraient de phénomènes en dehors de l'espace, mais plutôt des lois physiques dont le mode d'expression ne consiste pas en une modification des propriétés de l'espace lui-même. Ainsi, dans la théorie de la relativité générale telle que l'a créée Einstein, les lois de l'électromagnétisme sont de telles lois non spatiales. Car l'électromagnétisme n'y apparait pas comme une manifestation de propriétés de l'espace mais comme une force qui dévie la matière chargée de sa trajectoire inertielle, tout comme c'était le cas pour la force gravitationnelle dans la physique de Newton. La théorie unitaire recherchée par Weyl, qui vise à interpréter l'électromagnétisme comme une interaction de la matière avec l'espace au même titre que la gravitation, est donc une théorie où il n'y a plus de lois physique non spatiale. Une telle physique se réduit donc à la géométrie. Retenons globalement le schéma suivant pour la construction de la science de l'espace :

1. Géométrie mathématique,	2. Géométrie physique,	(3. Lois physiques non spatiales)

Les paragraphes qui vont suivre dans cette partie II. sont une analyse des concepts que met en place Hermann Weyl pour penser la première étape de cette construction. Il faudra attendre d'avoir incorporé les aspects physiques avant que la notion d'espace ne renvoie à une réalité effective, mais la notion purement mathématique d'espace comporte déjà les fondements de l'objectivité de la science de l'espace et forme le cadre de l'expression de certaines considérations *a priori* dont nous devons étudier le statut exact.

f. Du continuum à la notion de variété, place de la topologie dans *Espace-Temps-Matière*

Les deux prochains paragraphes (II.1. f. et g.) donnent une vue générale du contenu mathématique abordé dans l'introduction et le premier chapitre *d'Espace-Temps-Matière*. Seulement ensuite, nous pourrons entrer en profondeur dans les concepts mis en place par Weyl pour penser la géométrie.

Nous savons déjà que l'espace mathématique est un continuum de points rigoureusement isolés. C'est la construction analytique des nombres réels qui permet d'exprimer rigoureusement ce que signifie cette idée de continuum. Nous passons rapidement sur cette construction qui n'intervient pas explicitement dans *Espace-Temps-Matière*. Rappelons seulement les trois points importants suivants. Premièrement, des constructions mathématiques du continu (des nombres réels) basées sur la notion d'ensemble étaient disponibles depuis les travaux des mathématiciens du dix-neuvième siècle (notamment Charles Méray, Augustin Cauchy, Georg Cantor et Richard Dedekind) et étaient largement diffusés et acceptés dans la communauté des mathématiciens. Deuxièmement, Hermann Weyl a lui même proposé une nouvelle construction de ce continu dans *Le Continu*[122] car il n'était pas satisfait de la solution apportée par la théorie des ensembles. Nous verrons à quelques occasions en quoi cette nouvelle approche est liée aux travaux physiques de Weyl. Cependant, le fait même que Weyl ne se trouve pas obligé d'introduire ces travaux dans *Espace-Temps-Matière* montre bien que l'essentiel des problèmes abordés dans cet ouvrage sont relativement indépendant de la question du fondement rigoureux du continu des nombres réels. Troisièmement, et c'est le plus important, c'est l'héritage riemannien de la notion de variété [Mannigfaltigkeit] qui permet à Weyl de généraliser la notion primitive de continuité qui est celle des nombres réels, pour parvenir à l'idée générale d'un continuum pluridimensionnel.

L'idée d'utiliser les nombres à travers la notion de « coordonnées » pour penser l'étendue spatiale est au moins aussi vieille que les mathématiques cartésiennes. Mais les coordonnées cartésiennes ont une signification très particulières en tant qu'elles sont porteuses d'une dimension immédiatement métrique. Le développement d'un nombre croissant de types de géométries[123] au cours des dix-huitième et dix-neuvième siècles demandait qu'on élabore une notion générale d'espace comme un ensemble de lieux localisables rigoureusement par la donnée de coordonnées numériques, indépendamment du type de structure métrique qu'on y considère par la suite. Cette notion a été fournie, dans le cadre de l'école de Göttingen, par la fameuse notion de *variété continue* [stetige Mannigfaltigkeit] introduite par Bernhard Riemann dans son discours d'habilitation *Sur les hypothèses sous-jacentes à la géométrie*[124]. De nos jours, on présente une variété de dimension *n* comme étant un ensemble V de points tel qu'on puisse en chacun de ces points donner un paramétrage local de V qui envoie de façon homéomorphe un voisinage de V sur

---

[122] [Weyl 1918a]

[123] La profusion des géométries qui apparaissent ou simplement se développent pendant ces deux siècles est bien connue. Non seulement, on peut différencier plusieurs points de vue géométriques en fonction de la « strate » dans laquelle on se situe (projective, affine, conforme ou métrique), mais de plus, au sein de chaque strate, on peut développer plusieurs types de géométries répondant à des axiomes différents. Par exemple, au sein de la géométrie métrique, on peut développer aussi bien la géométrie euclidienne que la géométrie elliptique ou la géométrie hyperbolique.

Le développement des outils mathématiques pour développer les espaces courbes, notamment avec Carl Friedrich Gauss et Bernhard Riemann, a permis d'aboutir à la notion de variété qui donne un soubassement topologique commun à tous ces multiples espaces métriques. Mais la notion d'espace courbe a également permis une explosion encore bien plus spectaculaire de la multitude des notions d'espaces mathématiquement envisageables en se libérant de l'hypothèse de l'homogénéité de l'espace. On entre alors dans l'ère de ce qu'on nomme les « géométries analytiques ».

[124] [Riemann 1854]

un ouvert de R^n. Cette idée est présente dans *Espace-Temps-Matière*[125]. Elle se trouve aussi déjà chez Riemann, à ceci près que la topologie ensembliste telle qu'on la connait aujourd'hui n'était pas encore développée. La notion d'« homéomorphisme » en restait donc à un niveau intuitif. La topologie de R^n était bien connue à travers les notions métriques usuelles dont elle est induite. Riemann considérait que les paramétrages locaux de M permettaient d'induire une certaine notion de « voisinage » sur la variété. C'est toujours l'idée centrale pour définir une variété de nos jours.

Revenons à présent à Hermann Weyl. Quand il emploie la notion de « continu » [Kontinuum] multidimensionnel à propos de la notion d'espace, il a vraisemblablement en tête la notion de variété héritée de Riemann. Cette notion permet de fournir un support topologique aussi bien aux espaces analytiques du type « espace de Riemann », qu'aux espaces synthétiques du type de ceux envisagés par Felix Klein, ce second cas comprenant en particulier la géométrie euclidienne.

En lien avec cette idée riemannienne de variété, l'espace est muni de propriétés que nous nommerions aujourd'hui « topologiques » et qui sont caractérisées par la possibilité de paramétrer (au moins localement) l'espace par un nombre déterminé de coordonnées. Cependant, entre Riemann et Weyl, la topologie ensembliste s'est développée. Hermann Weyl est bien informé de cette nouvelle façon d'envisager la topologie par l'intermédiaire des propriétés structurelles que revêt l'ensemble des ouverts d'un espace topologique. Il a lui même développé une telle axiomatique dans son ouvrage de jeunesse *Sur l'idée d'une surface de Riemann*[126] en indiquant qu'il s'est inspiré des travaux de Brouwer, et en précisant que les travaux de Bernhard Riemann contenaient déjà les germes d'une telle analyse topologique.

Cette construction axiomatique de la topologie est cependant absente d'*Espace-Temps-Matière*. Elle y aurait trouvé difficilement sa place. Il est plus étonnant qu'elle soit absente du *Continu* dont le thème est l'analyse de la continuité. Un autre indice de la prise de recul d'Hermann Weyl à l'égard de la construction ensembliste de la topologie pendant la période 1917-1923, tient au fait qu'il parle de la topologie comme d'un niveau de l'analyse géométrique, « non structurel »[127], ou « non conceptuel » à l'opposé des autres niveaux que

[125] [RZM 1919, 75-76]

[126] [Weyl 1913, 17-18] Il y définit d'une manière axiomatique la structure que revêtent les voisinages ouverts des points d'une surface de Riemann. Dans le langage actuel, il donne en fait les propriétés structurelles d'une base de voisinages ouverts dans un espace topologique séparé.

[127] A propos de la construction de la géométrie de Minkowski, Hermann Weyl distingue dans [Weyl 1923, 3] les strates topologique, affine et métrique. La strate topologique (notion de point, de continuité…) a cependant un statut non structurel au contraire des deux autres :

sont le projectif, l'affine, le conforme et le métrique (cf. plus bas). Comment peut-il appeler « non structurel » un niveau de l'analyse géométrique dont l'axiomatisation prend la forme de réquisits de nature algébrique[128] ?

Il semble que la seule réponse à cette question consiste à admettre qu'Hermann Weyl était méfiant, au moins depuis 1917, à l'égard de l'approche ensembliste de la topologie qu'il avait d'abord adoptée pleinement. Nous ne voulons pas dire par là qu'il refuserait de donner un sens à la continuité en termes de structures de voisinages appliquées à un continuum de points isolés. En effet, cette stratégie, nous l'avons dit, revient de façon récurrente dans *Espace-Temps-Matière.* Il s'agit plutôt de voir que cette stratégie semble insuffisante à Weyl pour répondre au problème de la continuité, et en particulier à la question des rapports entre le continu intuitif et le continu arithmétique qu'il avait dû mettre temporairement à l'écart. Le continu a une dimension intuitive qui ne saurait se réduire à la structure algébrique que revêt l'ensemble des voisinages d'un point dans un continuum atomisé.

g. Les strates de structures spatiales et la notion de transformation

La notion mathématique d'espace chez Hermann Weyl ne consiste bien sûr pas en cette seule idée topologique d'un continuum multidimensionnel (disons 3-dimensionnel dans l'intention d'une application physique, ou 4-dimensionnel si on ajoute le temps). La nature géométrique de l'espace est donnée par des relations de plusieurs types : projectif, affine, conforme ou métrique, qui viennent s'ajouter à ce premier niveau topologique. Ces relations, prises ensembles, forment des structures dont l'essence peut être capturée par une analyse déductive, éventuellement sous forme axiomatique. C'est pourquoi,

---

> Les concepts fondamentaux qu'on emploie le plus adéquatement à la construction axiomatique de la géométrie de Minkowski, mis à *part les concepts de point et de connexion continue des points qui n'ont encore aucun aspect structurel*, sont les deux suivants : 1. La ligne droite, 2. L'élément nul.

Nous soulignons. Notre traduction de :

> Die Grundbegriffe, welche am zweckmäßigsten zum axiomatischen Aufbau der MINKOWSKIschen Geometrie verwendet werden, sind außer den, noch keine Strukturmomente enthaltenden Begriffen des Punktes und des stetigen Zusammenhanges der Punkte die folgenden beiden: 1. Die gerade Linie, 2. Das Nullelement.

[128] L'axiomatique ensembliste pour la topologie, tout comme celle que Weyl esquisse dans *L'idée d'une surface de Riemann*, se fonde sur les propriétés formelles des ouverts : une topologie pour un ensemble E est une partie de l'ensemble puissance de E qui vérifie : 1) L'intersection de deux ouverts est encore un ouvert, 2) La réunion d'une famille arbitraire d'ouverts est un ouvert, 3) L'ensemble vide est ouvert. La similarité est frappante avec d'autres structures algébriques comme par exemple la notion de tribu (Σ-algèbre). Dans de telles conditions, il devient problématique de comprendre pourquoi Weyl qualifie de « non structurelle » la topologie.

contrairement au niveau topologique, Hermann Weyl n'hésite pas à qualifier de « structurel » ces différents niveaux[129].

Nous supposerons que le lecteur est familier avec ces niveaux de structures spatiales qui sont traditionnels en géométrie. Nous nous contenterons de quelques idées schématiques pour simplement rappeler les relations entre ces différents niveaux. D'abord, ces niveaux forment ce que nous appelons des « strates ». C'est-à-dire que les niveaux sont emboités en termes de richesse de structure dans l'ordre suivant :

Topologique C Projectif C Affine (C Conforme)[130] C Métrique

(ACB signifie que la structure B est plus riche que la structure A)

La détermination d'un niveau de structure sur un espace mathématique détermine automatiquement tous les niveaux inférieurs (i.e. les structures moins riches). Ainsi, par exemple, la détermination de la structure métrique de l'espace nous dispense de donner ses structures conforme, affine, projective ou topologique. Celles-ci sont induites de la structure métrique. Le niveau topologique a été esquissé dans le paragraphe précédent et contient l'idée de la dimension de l'espace et la notion de voisinage d'un point. La strate projective contient la notion de direction et donc l'alignement des points, l'incidence des points sur une droite ou un plan, etc. Le niveau affine rajoute l'addition de deux déplacements et donc commence à relier ensemble les différentes directions. On dispose déjà à ce niveau de la possibilité de comparer deux segments prélevés sur une même droite. Le niveau conforme rajoute la notion d'angle qui finit de déterminer les relations entre deux directions. Enfin, le niveau métrique donne une notion de longueur d'un déplacement qui soit indépendante de sa direction.

Tous les niveaux n'interviennent pas avec le même degré d'intérêt dans *Espace-Temps-Matière.* La théorie de la relativité générale se donne comme une théorie physique qui ramène les interactions gravitationnelles à des interactions entre la matière et la structure *métrique* de l'espace-temps. Par conséquent, ce dernier niveau, le plus riche, est le

[129] Cf. notre note 25, p29 pour la place de la notion de structure chez Weyl.

[130] La signification du terme de « géométrie conforme » est ambigüe et demanderait un éclaircissement. Elle renvoie couramment soit à une géométrie de type kleinien comme la « géométrie de Möbius » dont parle Hermann Weyl dans [Weyl 1923], soit à l'étude d'une variété munie d'une classe d'équivalence de formes quadratiques $[g_{mn}]$ à multiplication près par un facteur $\lambda>0$. Cette dernière structure intervient dans la formation des espaces de Weyl. Nous laissons de côté ce problème qui est marginal dans *Espace-Temps-Matière* et n'est traité par Hermann Weyl que dans d'autres textes.

seul présent chez Einstein dans l'article originel, et reste prépondérant dans le texte d'*Espace-Temps-Matière*. Cependant, en réintroduisant les autres strates traditionnelles de la géométrie, et en s'interrogeant sur la place qu'elles doivent occuper au sein de la théorie d'Einstein, Weyl apporte un éclairage nouveau sur la théorie. Il clarifie la correspondance existant entre chaque strate de relations spatiales et son interprétation physique, au sein de la théorie de la relativité générale ou de sa propre théorie.

A travers la présentation de ces différentes strates de relations, on trouve une certaine constante chez Weyl. Il s'agit de l'idée d'introduire ces strates en exprimant les relations qu'entretiennent, non pas les *objets* (points, droites, plans…) placés dans l'espace, mais plutôt les *transformations* de l'espace qui laissent invariantes ces structures. Ces transformations forment un groupe au sens algébrique du terme. C'est une idée importante héritée des mathématiques du dix-neuvième siècle. Les historiens des sciences l'attribuent en priorité à Hermann Ludwig von Helmholtz, et aux deux fameux géomètres dont les échanges intellectuels ont donné naissance au fameux *Programme d'Erlangen*[131], à savoir Felix Klein et Sophus Lie.

Le programme d'Erlangen permettait d'unifier le foisonnement des géométries disponibles à la fin du XIX^ème^ siècle (à l'exclusion des espaces analytiques du type de ceux envisagés par la géométrie différentielle) en les classant en fonction du groupe des transformations qui laissent globalement invariantes la structure des relations spatiales qui y sont définies. C'est ainsi que, par exemple, Hermann Weyl définit la strate affine en donnant deux axiomatiques correspondant à nos axiomatiques actuelles d'espace vectoriel et d'espace affine[132]. La première axiomatique donne la structure des relations qu'entretiennent les vecteurs, ces derniers étant interprétés par Hermann Weyl comme formant une sous-classe de la classe des transformations affines (i.e. celles qui laissent invariante la structure affine)[133]. En effet, les vecteurs sont vus en premier lieu comme des translations de l'espace. De même, la structure métrique est donnée non pas en considérant des corps rigides placés dans l'espace mais en donnant la métrique elle-même (sous la forme

[131] [Klein 1892]

[132] [RZM 1919, 15-16]

[133] En toute rigueur, Hermann Weyl ne définit pas, dans le passage référencé, les translations comme une sous-classe des transformations affines, mais comme une sous-classe des transformations congruentes (i.e. des isométries, des applications laissent invariant la structure *métrique* de l'espace euclidien). Cette présentation provient du fait qu'Hermann Weyl veut introduire la géométrie vectorielle en s'appuyant sur l'intuition euclidienne du lecteur pour en abstraire les aspects purement vectoriels. Il ne faut pas pour autant renverser l'ordre logique et croire que la géométrie affine soit dépendante d'une géométrie métrique. L'axiomatique des espaces vectoriels donne précisément un sens à la notion de vecteur sans plus aucune référence aux notions métriques.

d'une forme quadratique) et donc médiatement les transformations qui respectent la structure métrique.

Au-delà du motif d'unification qui présidait aux recherches du programme d'Erlangen, Hermann Weyl voit dans cette façon d'aborder la géométrie la seule qui atteigne pleinement son objet dans la mesure où elle s'intéresse directement à la notion d'espace elle-même, et non plus indirectement à travers les objets qu'on y place[134].

Nous reviendrons sur la signification des différentes strates lorsque ce sera nécessaire. L'analyse épistémologique qui va suivre est cependant largement transversale, c'est-à-dire qu'elle s'applique indifféremment à chacune de ces strates. Ainsi, les concepts que met en place Weyl pour penser l'espace (les concepts de forme, d'homogénéité, d'idéalité, etc.), par le fait qu'ils peuvent être déclinés dans chacune des strates structurelles de l'espace, permettent de le saisir dans son unité.

---

[134] [RZM 1921, 92] :

> Cette théorie [Il s'agit de la géométrie infinitésimale pure] dans laquelle, selon moi, un grand développement de la pensée a atteint son objectif, et dans laquelle le résultat de ce développement a trouvé sa forme finale, est une véritable *géométrie*, une doctrine de l'*espace lui-même*, et non pas simplement comme la géométrie d'Euclide et à peu près tout ce qui a été fait par ailleurs sous le nom « géométrie », une doctrine des figures possibles dans l'espace.

Notre traduction de :

> Diese Theorie, in der, wie ich glaube, eine große Gedankenentwicklung ihr Ziel erreicht und das Ergebnis derselben seine endgültige Gestalt gewonnen hat, ist eine wirkliche *Geometrie*, eine Lehre vom *Raum selbst*, und nicht bloß wie die Geometrie des Euklid und fast alles, was sonst unter dem Namen Geometrie betrieben wird, eine Lehre vom den im Raume möglichen Gebilden.

Ici, Hermann Weyl est évasif. On ne voit pas bien que c'est le fait d'analyser directement le groupe des transformations congruentes qui fait de sa géométrie une « véritable *géométrie* ». Cependant, ce point est confirmé par les différentes caractérisations de l'espace comme forme que nous verrons ci-dessous et par le texte de [Weyl 1923, 3] où il appelle le groupe des transformations congruentes : « la notion véritablement fondamentale de la géométrie » [der eigentliche Fundamentalbegriff der Geometrie]

2. L'espace mathématique comme forme

a. Authenticité des différentes caractérisations de l'espace dans *Espace-Temps-Matière*

La terminologie d'Hermann Weyl pour exprimer l'essence de la notion d'espace varie quelque peu[135]. L'espace est une « forme d'existence du monde réel », une « forme de notre intuition », « une forme de la réalité corporelle », « une forme du monde extérieure », ou encore une « forme de l'apparence ». Ces caractérisations apparaissent dans des contextes divers, si bien qu'il faut être attentif à ce qui est effectivement repris au compte de notre auteur, et à la place que fait jouer Hermann Weyl à ces caractérisations dans le schéma général de sa réflexion sur l'espace.

D'abord, il faut remarquer que les premières occurrences de ces caractérisations succinctes de la notion d'espace interviennent dans l'introduction, au moment où Hermann Weyl ne parle pas en son nom mais pour retracer l'histoire du concept d'espace. En particulier, la caractérisation de l'espace comme forme de notre intuition [Form unserer Anschauung] intervient d'abord quand[136] Hermann Weyl traite de la place qu'occupe Immanuel Kant dans l'histoire du concept d'espace. La méfiance qu'Hermann Weyl manifeste par ailleurs à l'égard de la philosophie de Kant pourrait nous amener à douter du fait qu'Hermann Weyl reprenne bien à son compte cette caractérisation de l'espace. Cependant, si nous comparons la façon dont il précise à chaque fois la signification de ces différentes dénominations, et si nous nous rapportons aux passages où il parle clairement en son nom[137], nous en venons aux conclusions que, d'une part, toutes ces diverses dénominations sont des aspects d'un seul et même concept d'espace ; et que, d'autre part,

[135] [RZM 1919, 1] : „Existenz*formen* der realen Welt", [RZM 1919, 3]: „eine Form unserer Anschauung", [RZM 1919, 5]: „die Form der Körperlichen Wirklichkeit", [RZM 1919, 5]: „Form der Außenwelt", [RZM 1919, 10] : „Form der Erscheinungen", [RZM 1919, 86] : „Der Raum ist Form der Erscheinungen und, sofern er das ist, notwendig homogen",

[136] [RZM 1919, 5]

[137] Il ne fait guère de doute par exemple pour [RZM 1919, 10] et [RZM 1919, 86] qu'Hermann Weyl parle en son nom.

Hermann Weyl assume pour son propre compte ces caractérisations qu'il considère comme issues d'une longue tradition, même si, comme nous le verrons, il place derrière ces termes un sens déviant assez personnel par rapport au sens initial qu'y avait placé leurs auteurs, à commencer par Immanuel Kant.

Ensuite, on peut se demander à quel niveau, parmi les trois évoqués dans notre partie II.1.a., se place ces définitions de la notion d'espace. S'agit-il de l'espace intuitif, de l'espace tel qu'il nous est donné par la géométrie mathématique ou de la réalité physique des relations spatiales effectives ? La réponse à cette question est difficile et s'éclairera progressivement dans ce qui suit. Annonçons la réponse à laquelle on veut aboutir. Le fait qu'Hermann Weyl caractérise cet espace comme « forme » par référence à son homogénéité nous indique déjà qu'il ne peut s'agir ici de caractériser les relations spatiales dans leur effectivité physique[138]. Nous verrons alors que la notion d'espace comme forme est transversale au sens où elle se retrouve dans les deux autres niveaux que nous avons caractérisés. Cela renvoie aussi bien à l'espace tel qu'il nous est donné à l'intuition perceptive, qu'à l'espace atomique et conceptuel de la géométrie mathématique. Mais cet aspect de la notion de l'espace ne se réalise pas au même degré dans ces deux niveaux. C'est seulement au niveau mathématique que la notion d'espace comme forme trouve son expression la plus pure. Nous verrons en revanche que l'idéalité de l'espace a un sens très particulier chez Weyl qui a un rapport avec son origine comme espace intuitif relevant du sujet perceptif individuel.

Maintenant que nous avons en tête le statut de cette notion dans l'économie de la pensée d'Hermann Weyl, venons-en au contenu proprement dit des caractérisations qu'il nous donne.

b. La notion de forme chez Weyl et ses opposés

Le premier invariant que nous trouvons dans les différentes caractérisations de la notion d'espace que nous avons rapportées, consiste à penser cette notion à travers celle de *forme*. Le terme allemand utilisé pour forme est tout simplement « Form ». En revanche, le terme qu'Hermann Weyl place en face, pour jouer le jeu de l'opposition conceptuelle, varie de manière significative. L'introduction d'*Espace-Temps-Matière* commence par l'opposition entre le temps et l'espace comme formes [Form] du monde réel et la matière qui en est la

[138] Nous reviendrons sur ce que signifie cette homogénéité, et verrons que la théorie de la relativité générale impose une hétérogénéité de la forme des relations métriques effectives dans chaque région de l'Univers où la matière est distribuée de façon hétérogène.

substance [Substanz][139]. Cette opposition ne revient pas telle quelle dans le texte. Ce qui est opposé directement à la forme c'est le *contenu*. Mais il y a plusieurs termes allemands aux significations divergentes employés par Weyl pour signifier le contenu : « Erfüllung », « Gehalt » et « Inhalt ».

Le premier terme, « Erfüllung » est celui employé en allemand pour parler du contenu au sens par exemple de ce qu'il y a à l'intérieur d'une boite. Cela nous éclaire sur les relations entre d'un côté l'espace et le temps et de l'autre la matière qui, en tant que substance, se déplace pour ainsi dire à l'*intérieur* du temps et de l'espace. En ce sens, le fait que l'espace soit une forme signifie qu'il est dans sa nature de pouvoir recevoir un contenu (qu'il s'agisse, suivant le niveau où on se place, d'un objet perceptif, matériel ou géométrique) en chacun des emplacements qui le constitue. Ce premier sens lâche du terme « forme » convient bien aux trois niveaux que nous avons caractérisés de la notion d'espace. Mais on trouve un sens plus strict. Hermann Weyl précise en effet que l'espace, en tant que forme, ne doit pas seulement être capable de recevoir un contenu en chacun de ses emplacements. Il doit de plus pouvoir recevoir *le même* contenu en *chacun* des emplacements qui le constituent. C'est ce qu'il appelle l'*homogénéité de l'espace*[140] qu'il considère comme le trait essentiel de la notion d'espace comme forme au sens le plus strict. Pour des raisons différentes[141], cette homogénéité ne peut se réaliser pleinement ni au niveau intuitif de la perception, ni au niveau physique des relations spatiales effectives, mais seulement au niveau intermédiaire des mathématiques.

Au niveau mathématique, les emplacements constitutifs de l'espace sont tous simplement les points isolés du continuum atomisé. L'idée d'homogénéité prend alors le

[139] [RZM 1919, 1]

[140] Cette notion sera thématisée plus bas.

[141] Rien n'est dit clairement nous semble-t-il, dans les textes d'Hermann Weyl, sur le fait que l'espace au niveau purement intuitif de la perception manifesterait une quelconque homogénéité. Ce manque est sans doute lié à la mise à l'écart partielle du problème philosophique de l'espace. Il est cependant douteux que l'homogénéité de l'espace se réalise au niveau perceptif si on pense aux analyses des physiologues des décennies qui précèdent Hermann Weyl, dont certaines ont été reprises de façon célèbre par Henri Poincaré. On trouve bien des occurrences chez Weyl d'une forme d'homogénéité présente au niveau intuitif ([Weyl 1918a]) mais accompagnée de la remarque qu'il ne s'agit pas de l'homogénéité telle qu'on la trouve en mathématique. Hermann Weyl précise que l'étude des relations entre les deux types d'homogénéité est un véritable problème.

La raison pour laquelle l'homogénéité ne peut être réalisée au niveau physique est plus difficile à saisir. Ce point est lié à l'hypothèse de la dépendance des relations métriques à l'égard du contenu de l'espace. Nos parties III.2 et III.3 y sont entièrement consacrées.

Il est de toute façon clair dans le texte que la notion d'espace comme forme homogène n'est pleinement réalisée qu'au niveau mathématique qui est toujours celui dans lequel Hermann Weyl se place quand il développe la signification de cette homogénéité et de la notion stricte d'espace comme « forme ».

sens plus précis suivant qui semble pour Weyl, en définitive, la définition stricte de l'espace comme forme :

> Cet espace est la forme du monde extérieur, c'est-à-dire : chaque chose physique peut, sans qu'aucune de ses qualités ne devienne autre que ce qu'elle est, être tout aussi bien à un autre point quelconque de l'espace que celui où elle est précisément. C'est ainsi qu'obtient l'homogénéité de l'espace où repose la véritable racine du concept de congruence.[142]

Ce passage est important en tant qu'il nous éclaire sur les rapports étroits dans la pensée de Weyl entre les concepts d'espace, de forme, et d'homogénéité. Nous ne devons cependant pas être trompés par la référence au monde extérieur et aux objets physiques. Que l'espace soit présenté ici comme étant une forme du monde extérieur ou comme ayant un contenu physique ne signifie pas du tout qu'il doive être pensé lui-même comme étant quelque chose de tout à fait extérieur au sujet ou comme ayant lui-même une réalité physique. Ce que nous dirons ci-dessous à propos du caractère idéal de l'espace et des considérations *a priori* qui guident le travail géométrique de Weyl nous détournera de cette interprétation.

Venons-en d'abord aux deux autres termes allemands, « Gehalt » et « Inhalt » employés pour désigner le contenu opposé à la forme. Ils sont synonymes et sont employés souvent pour parler du contenu *qualitatif* d'une pensée, d'un concept, ou d'une expérience vécue. Hermann Weyl joue sur le sens particulier de ces mots allemands pour glisser de l'opposition contenant/contenu à l'opposition quantitatif/qualitatif. L'espace comme forme vide, en attente d'un contenu[Erfullung], est sans qualités[Inhalt] autres que la structure homogène qui le caractérise. C'est pourquoi il est entièrement mathématisable. A l'opposé, le contenu[Erfüllung] de l'espace est constitué de substances aux qualités [Inhalt] diverses et inépuisables et qui résistent par conséquent à une mathématisation complète[143]. C'est pourquoi, finalement, l'espace comme forme est opposé à une notion de contenu qui peut

---

[142] Notre traduction. [RZM 1919, 5] :

„Dieser Raum ist Form der Außenwelt; das will sagen: jedes körperliche Ding kann, ohne irgendwie inhaltlich ein anderes zu sein als es ist, ebensogut an jeder anderen Raumstelle sein als gerade an dieser. Damit ist zugleich die Homogenität des Raumes gegeben, und hier liegt die eigentliche Wurzel des Kongruenzbegriffs"

Cf. aussi [Weyl 1923, 1]. D'autres passages similaires où Weyl traite de la notion d'homogénéité sont : [RZM 1919, 7], à propos du temps, [RZM 1919, 14-17], à propos de la ligne droite, [RZM 1919, 17], à propos du plan.

[143] [Weyl 1923, 2] Remarquons que cette idée d'une mathématisation complète de l'espace par opposition à son contenu ne prend tout son sens dans la pensée d'Hermann Weyl qu'à partir de la 4ème édition d'*Espace-Temps-Matière*, lorsque son projet de réduction ontologique de la matière au champ spatial était abandonné.

être comprise jusqu'à un certain point indifféremment comme Erfüllung ou comme Inhalt[144]. La forme homogène et mathématiquement quantifiable qu'est l'espace, est opposée à son contenu matériel, qualitativement inépuisable, et qui résiste à une mathématisation complète.

Le fait que l'espace soit compris ici comme quelque chose pouvant être parfaitement capturé mathématiquement, au contraire de son contenu saisissable uniquement par le biais de qualités sensibles, est à la source d'une première compréhension de la notion d'espace, à l'intérieur de l'histoire de ce concept que reconstruit Weyl. Les qualités sensibles comme la couleur étant les premières dont l'épistémologie moderne ait montré historiquement le caractère subjectif[145], l'opposition entre forme quantifiable et contenu qualitatif oppose ce qui peut être objectivable (l'espace) à ce qui est voué à une forme subjective de connaissance (les objets sensibles). Cette opposition correspond pour Weyl à l'état de la pensée atteint à l'âge classique avec la dépréciation des qualités sensibles en tant que fondements possibles d'une connaissance scientifique, et le programme cartésien de prendre la géométrie pour seul modèle de la connaissance scientifique. Selon ce programme, toute chose, pour être scientifiquement connaissable, doit être ramenée à du mouvement, seule réalité objectivable, i.e. à une composition de déplacements de solides, caractérisés par leur seule impénétrabilité et par leur forme géométrique, dans un temps lui même objectivé comme une forme quantifiable.

Cette première compréhension de la notion d'espace doit cependant être dépassée par la compréhension du caractère idéal de l'espace qui constitue le second invariant dans les diverses caractérisations par Weyl de la notion d'espace.

c. Une réception très personnelle de la thèse d'idéalité de l'espace

Un second trait essentiel de l'espace tel qu'on le trouve dans *Espace-Temps-Matière* est son idéalité, c'est-à-dire un certain type de subjectivité, visible à travers les termes « formes *de l'apparence* »[Form der Erscheinungen] ou « formes de *notre intuition* » [Form unserer Anschauung] qu'Hermann Weyl affirme hériter d'Immanuel Kant[146]. Notre auteur voit dans la figure du philosophe de Königsberg une étape essentielle dans la prise de

[144] Par ailleurs, dans [Weyl 1923, 1], Weyl nous apprend qu'il hérite de Kant cette opposition entre l'espace conçu comme forme et son contenu compris comme contenu qualitatif [Inhalt].

[145] [RZM 1921, 3] Weyl renvoie à Hobbes et Descartes. Nous parlons ici de l'épistémologie « moderne » pour parler de celle qui s'est développée à partir de la naissance de la physique mathématique avec Galilée.

[146] [RZM 1921, 3]

conscience du statut épistémologique du concept d'espace. On sait que, chez Kant, si l'espace est la forme de la réalité extérieure, ou du monde extérieur, il n'est pas lui même quelque chose qui appartient à cette réalité extérieure mais est une forme de notre rapport à celle-ci en tant que sujets connaissants. Hermann Weyl préfère dire que l'espace est quelque chose de subjectif au même titre que les qualités sensibles et que la théorie de la relativité a, dans le domaine de la physique, confirmé l'idéalité de l'espace qui avait été affirmée, dans le domaine de la philosophie, par Kant. Il nous semble que cette association, en partie indue, que Weyl opère entre le type de subjectivité accordé aux qualités sensibles par les auteurs du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, et la subjectivité intervenant dans l'idéalisme transcendantal de l'espace peut être expliquée probablement par une certaine interprétation psychologisante de Kant, présente dans d'autres textes de Weyl[147]. C'est-à-

[147] Nous disposons de toute une série d'indices qui plaident en faveur du fait qu'Hermann Weyl aurait eu une interprétation psychologisante de la philosophie kantienne, le type même d'interprétation contre lequel se battait l'école néokantienne de Marbourg à la même époque. Autrement dit, Hermann Weyl semble attribuer à Kant l'idée que l'espace auquel l'idéalisme transcendantal donne le statut de forme de la sensibilité, ne serait pas le fruit d'une construction en partie conceptuelle, mais serait une donnée psychologique immédiate accompagnant tout acte de perception. La géométrie euclidienne s'imposerait avec évidence dans le vécu psychique qui accompagne immédiatement toute perception.

Ces indices en faveur d'une interprétation psychologisante de la pensée de Kant par Hermann Weyl sont :

1) La disparition dans les textes de Weyl de la notion de sujet transcendantal au profit d'un sujet psycho-physique individuel et ponctuel localisé dans le monde (idéalisé par un « œil ponctuel » Cf. plus bas p.149).
2) La façon dont cette disparition de la notion de sujet transcendantal permet à Hermann Weyl dans l'introduction d'*Espace-Temps-Matière* de glisser insensiblement de la subjectivité des qualités sensibles dans l'épistémologie de Descartes et Hobbes à la subjectivité de l'espace chez Kant : [RZM 1918, 3]
3) Le texte suivant, contenant un glissement similaire. Il est issu de son article « Die Einsteinsche Relativitätstheorie »:

> « Ainsi, chaque individu vit son histoire. Leurs flux de conscience entretiennent mutuellement des relations qui sont restreintes dans leur possibilité par la structure de l'espace-temps que nous avons décrite. Mais, le monde lui-même n'a pas d'histoire. Par conséquent, longtemps après que la physique se soit libérée des qualités sensibles, la philosophie moderne met en avant avantageusement la grande découverte de Kant selon laquelle le temps et l'espace ne sont que des formes de notre intuition sans signification objective. En reconnaissant sa différence avec la philosophie kantienne, la physique a le courage de pénétrer [ergründen] et de représenter en symboles mathématiques le domaine[Reich] aspatial et intemporel des « choses en soi » qui est caché derrière les apparences. »

Dans [GA, 131] :

> So, erlebt jedes Individuum seine Geschichte. Untereinander stehen ihre Bewußtsein-Ströme in einem Wirkungszusammenhang, der durch die von uns geschilderte Weltstruktur in seinen Möglichkeiten begrenz ist. Die Welt selber aber hat keine Geschichte. So kommt in der modernen Physik – nachdem sie sich längst von den Sinnesqualitäten befreit hatte – die große Erkenntnis Kants zur Geltung, daß Raum und Zeit nur Formen unserer Anschauung sind ohne Bedeutung, für das Objektive. Anders freilich als die Kantische Philosophie findet die Physik den Mut, das hinter den Erscheinungen verbogene raum- und zeitlose Reich der „Dinge an sich" zu ergründen und in mathematischen Symbolen darzustellen.

dire qu'Hermann Weyl présente toujours l'espace qui intervient dans la thèse de l'idéalisme kantien de l'espace comme s'il se confondait avec l'espace immédiatement perçu par la conscience individuelle. Il ne nous est pas possible ici de prendre parti sur la justesse d'une telle interprétation, mais il faut savoir qu'elle a toujours été présente depuis l'avènement de la *Critique de la Raison Pure* et qu'elle était la cible de critiques, à l'époque d'Hermann Weyl, de la part de l'école de Marbourg.

Nous allons montrer que ce que Weyl appelle « l'idéalité de l'espace » et qu'il accole au nom de Kant a une signification assez éloignée de l'idéalisme transcendantal kantien alors même que, dans d'autres aspects du texte de Weyl où la figure de Kant est absente, on trouve des traits qui rapproche fortement sa démarche d'un idéalisme transcendantal, au sens indiqué dans notre partie I.

Outre par ce basculement de la terminologie, il faut aussi nuancer l'héritage kantien concernant l'idéalité de l'espace, en rappelant les diverses critiques qu'Hermann Weyl fait par ailleurs de la pensée du philosophe de Königsberg. Dans ses lignes générales, la stratégie d'Hermann Weyl à l'égard des rapports entre la doctrine kantienne de l'espace et la théorie de la relativité est comparable à celle des néokantiens et autres interprètes idéalistes de la théorie de la relativité[148]. Tout en voulant conserver le caractère idéal de l'espace, il refuse que nous ayons un rapport intuitif à la forme structurelle de ses relations (affine, métrique, etc.) qui nous imposerait avec évidence la structure « rigide »[149] qu'est celle de la géométrie euclidienne.

Ce schéma d'ensemble est partagé avec les autres interprètes idéalistes de la théorie, à ceci près qu'Hermann Weyl ne voit pas dans les traits de la théorie kantienne qui ont été abandonnés, des traits accessoires dont on peut se débarrasser sans trahir l' « esprit » de la philosophie kantienne. Au contraire, le rapport intuitif à l'espace qui imposerait avec évidence la forme euclidienne des relations métriques dans l'espace était, selon Weyl, un maillon essentiel de l'épistémologie kantienne, auquel il avait lui-même cru avec enthousiasme dans son enfance intellectuelle. C'est pourquoi, bien qu'il revendique l'idéalité de l'espace et adopte une stratégie comparable à celle des néokantiens de Marbourg et autres interprètes idéalistes de la relativité, il refuse pourtant de se placer comme un continuateur de la pensée kantienne.

---

[148] Cf. notre introduction I.2.c.

[149] Ce que Weyl appelle ici « rigidité » est la comparaison possible entre les longueurs et directions d'objets spatiaux aussi éloignés que voulu, comparaison qui disparaitra dans le passage d'une *Ferngeometrie* à une *Nahegeometrie* (cf. partie IV.)

Au vu de ses réticences à l'égard de la philosophie kantienne, nous comprenons que ce n'est pas à partir de ses références au philosophe de Königsberg que nous comprendrons à quelle type de subjectivité Weyl réfère lorsqu'il parle de forme *de notre intuition* ou de forme *des apparences*. Il va falloir plutôt étudier la notion particulière de sujet qu'Hermann Weyl développe dans ses propres écrits.

3. L'objectivité géométrique comme abstraction du sujet-coordonnées

a. Le sujet-coordonnées et sa fonction dans l'épistémologie de la géométrie

Nous avons vu qu'Hermann Weyl partait du sujet individuel conscient et percevant quand il décrivait la genèse du concept d'espace et que, d'autre part, il concevait une rupture épistémologique radicale entre le niveau intuitif de la perception et le niveau mathématisée de la science. Cette rupture qui permet l'objectivité de la science de l'espace va donc être interprétée par Weyl comme une tentative d'*élimination du sujet* au sein de la connaissance pour parvenir au niveau objectif de la science. En raison de l'interprétation particulière qu'Hermann Weyl donne à l'idéalité de l'espace, il résulte de ce mouvement d'élimination du sujet que le point de vue objectif de la science ne peut s'acquérir chez Hermann Weyl qu'en neutralisant en un certain sens le temps et l'espace comme formes des apparences.

Or, chez les philosophes qui défendent une forme d'idéalisme transcendantal, l'espace et le temps sont des formes attribuées au sujet qui sont des conditions de possibilité de la science, et certainement pas ce contre quoi l'objectivité physique doit se construire. Ainsi, ce schéma de l'épistémologie de Weyl a des résonnances fortement anti-idéalistes, en contradiction avec ce que nous avons annoncé par ailleurs, et en contradiction avec le consensus à ce sujet chez les commentateurs d'Hermann Weyl. Nous allons montrer que cette contradiction n'est qu'apparente et qu'elle est due à un renversement chez Weyl de la terminologie utilisée habituellement par les interprètes idéalistes de la géométrie et de la relativité ; renversement lié à la notion particulière de sujet adoptée par Weyl.

Le terme « sujet »[Subjekt] chez Hermann Weyl renvoie en premier lieu au sujet conscient individuel qui reçoit les données perceptives qualitatives (qualia) à partir desquelles il conçoit immédiatement les objets concrets et les relations spatiales intuitives qu'ils entretiennent. En tant qu'il s'agit d'un sujet *individuel* et dont les rapports au monde sont immédiats et dépendants de la forme singulière de son appareil psycho-physiologique, on comprend que Weyl décrive l'objectivité scientifique comme une *élimination du sujet* dans la description du monde. Cette élimination du sujet consiste d'abord en l'abandon des traits qualitatifs issus de la perception au profit d'une construction conceptuelle rigoureuse qui s'exprime sous forme mathématique. C'est la rupture dont nous avons traitée ci-dessus entre le continuum intuitif et le continuum conceptuel atomistique. Mais, au-delà de ce passage possible du qualitatif au quantitatif, un élément du sujet n'est pas purement et simplement éliminable, c'est sa position (comprise au sens cinématique qui comprend, outre la position au sens strict, le mouvement) à l'égard des autres constituants du monde :

> « Mais cette objectivation par élimination du moi et de son vécu intuitif immédiat ne réussit pas complètement ; le système de coordonnées, qui peut seulement être montré par un acte individuel (et seulement approximatif), subsiste comme le résidu nécessaire de cette élimination du Je.»[150]

Ce « système de coordonnées » que Weyl pense comme un composant de la notion de sujet s'apparente à celui qu'on rencontre habituellement au sein des sciences de l'espace et du mouvement. En géométrie, on trouve la notion proprement dite de *système de coordonnées*. Pour la cinématique, on trouve la notion de *système mobile de coordonnées* ; une coordonnée temporelle s'ajoutant aux trois coordonnées spatiales. Enfin, en mécanique, on trouve la notion de *référentiel*. Cette dernière notion sort alors du cadre strictement mathématique car il s'agit d'un système de coordonnées mobile rattaché *physiquement* à un corps matériel en mouvement et en interaction avec le reste du monde.

---

[150] Notre traduction de [RZM 1921, 8] :

> Aber diese Objektivierung durch Ausschaltung des Ich und seines unmittelbaren Lebens der Anschauung gelingt nicht restlos, das nur durch eine individuelle Handlung (und nur approximativ) aufzuweisende Koordinatensystem bleibt als das notwendige Residuum dieser Ich-Vernichtung

Un texte approchant se trouve dans *Le Continu* :

> Le système de coordonnées est le résidu inévitable de la destruction du Je dans ce monde géométrico-physique que la raison extrait du donné selon la norme de l' « objectivité ». [Il est] le dernier signe, à l'intérieur de cette sphère objective, du fait que l'existence est donnée et ne peut être donnée que comme contenu intentionnel du vécu de la conscience d'un pur Je donneur de sens.

Notre traduction de [Weyl 1918a, 72] :

> Das Koordinatensystem ist das unvermeidliche Residuum der Ich-Vernichtung in jener geometrisch-physikalischen Welt, welche die Vernunft aus dem Gegebenen unter der Norm der "Objektivität" herausschält — letztes dürftiges Wahrzeichen noch in dieser objektiven Sphäre dafür, daß Dasein nur gegeben ist und gegeben sein kann als intentionaler Inhalt der Bewußtseinserlebnisse eines reinen, sinngebenden Ich.

Il est justifié de considérer ces trois notions comme des espèces ou des composantes de la notion de sujet dans la mesure où chacun de ces systèmes de référence donne un cadre par rapport auquel le monde peut être connu, ce qui signifie dans ce cas qu'il peut être mesuré. La subsomption de ces notions géométriques et physiques sous la notion de sujet est proposée par Hermann Weyl lui-même dans les passages du type de celui que nous venons de citer où il considère ces systèmes de référence comme des résidus de l'Ego dans la démarche désubjectivante de la science. Pour différencier cette notion de sujet, à notre connaissance la seule avec celle du sujet individuel conscient qui apparaisse explicitement sous le terme « Subjekt » dans les écrits de Weyl de la période[151], des autres notions de sujet qui nous servent dans la caractérisation de l'épistémologie d'Hermann Weyl, nous utiliserons l'appellation de « sujet-coordonnées ».

Il faut avant tout remarquer le caractère d'individualité du sujet-coordonnées. Il ne désigne pas un cadre de connaissance commun mais désigne au contraire quelque chose qui fait de chaque individu un point de vue unique sur le monde. L'individualité de chaque sujet-coordonnées n'est déterminée que par la position (au sens large) particulière qu'il occupe à l'égard des autres sujets-coordonnées. Ainsi, s'il n'est pas le sujet individuel concret avec toutes ses caractérisations propres, il est plutôt un sujet individuel abstrait dans la mesure où on a seulement conservé du sujet individuel ce qui le distingue des autres du point de vue de sa position, son mouvement ou sa dynamique.

En quel sens ne peut-on se passer du système de coordonnées pour décrire l'espace mathématisé ? Certes, le mathématicien pur, celui qui n'effectue qu'un travail purement conceptuel sur les relations spatiales, peut à la limite se passer d'un système de coordonnées. Il considère alors uniquement les objets géométriques de façon *abstraite*, dans le sens où il travaille uniquement à partir d'une axiomatique qui caractérise conceptuellement les relations spatiales objectives sans avoir besoin de n'individualiser aucun point. Par exemple, il peut travailler seulement avec l'axiomatique des espaces vectoriels sans l'aide d'une base vectorielle. Mais pour que la géométrie mathématique ne soit pas qu'un pur jeu conceptuel mais soit une première étape pour que le géomètre *expérimental* puisse effectuer des mesures en vue d'avoir accès à la dimension spatiale de la *réalité physique*, alors la détermination d'un système de coordonnées devient indispensable.

[151] On trouve seulement 3 occurrences dans [RZM 1919] du terme « Subjekt » et de ses dérivés. Une occurrence renvoie à la donnée du système de coordonnées, les deux autres au sujet individuel conscient qui perçoit à travers la donnée de qualités sensibles. Dans *Le Continu* [Weyl 1918a], outre la notion logique de sujet, Hermann Weyl emploie ce terme pour désigner la donnée arbitraire d'un ordre pour étiqueter les arguments d'un symbole de relation. L'important est de voir que ce terme apparait encore une fois ici avec un contenu négatif vis-à-vis de la constitution de l'objectivité scientifique. Le sujet apparait toujours comme la part inévitable d'arbitraire qu'on doit introduire pour pouvoir *appliquer* les connaissances théoriques, et contre quoi doit se constituer l'objectivité scientifique en rendant inoffensif cet arbitraire.

A défaut de pouvoir désigner conceptuellement (i.e. par une définition) un point individuel de l'espace (c'est impossible puisque, par essence, l'espace est homogène[152]), on doit fournir pour individualiser les points de l'espace une *donnée immédiate* : c'est le système de coordonnées. Puisque ce système n'est pas *définissable* dans sa singularité, on n'y accède que de façon approximative par un « *acte de monstration* » nous dit Weyl.

Hermann Weyl reste allusif sur la signification concrète de cet acte de monstration. Une réflexion sur le rôle du système de coordonnées dans les sciences de l'espace peut cependant éclairer l'affirmation de Weyl. Quand on est dans le domaine pur de la géométrie mathématique, il est clair qu'un système de coordonnées au sein d'un espace homogène, i.e. à l'égard duquel chacun de ces systèmes ne peut être distingué conceptuellement des autres, ne peut recevoir de définition mathématique. Quand le mathématicien énonce « fixons un système de coordonnées », il veut signifier que c'est un seul et même système de coordonnées qui sera utilisé dans la suite de son discours. Mais cet acte d'énonciation ne détermine bien sûr aucun système de coordonnées *particulier* au sein de la multiplicité homogène des possibilités. La singularité du système de coordonnées n'intervient pas dans la suite du raisonnement mathématique, et doit être considérée comme une donnée extérieure aux mathématiques elles-mêmes, qui est représentée par exemple par l'acte du tracé d'axes de coordonnée sur une feuille de papier, ou par le simple fait de donner un nom au système qu'on veut fixer.

Dans l'application de la géométrie aux mesures concrètes, le système de coordonnées va se matérialiser dans le choix singulier d'un instrument de mesure et de sa situation dans le monde. Ce qui vient déterminer le système de coordonnées dans sa singularité n'est donc pas quelque chose d'ordre mathématique, c'est un référentiel au sens physique du terme. Ce référentiel, de par sa réalité matérielle concrète, ne peut alors qu'être montré (mais non pas défini) avec toute l'approximation qui entoure nécessairement tout acte de monstration. Pour prendre un exemple concret, le référentiel de Copernic n'est pas défini mais montré : c'est le référentiel qui a pour origine le centre de gravité du système solaire et dont les axes pointent vers les étoiles fixes. Bien sûr, une partie de cette caractérisation est encore conceptuelle (au moins par le biais du concept de centre de gravité) mais il repose en dernier lieu sur la *mesure* précise de la masse et des positions des corps du système solaire et de la direction relative des étoiles fixes.

Avec la distinction entre la définition et l'acte de monstration, on trouve ici l'opposition entre le donné intuitif et le conceptuel, qui restera un leitmotiv de la pensée épistémologique d'Hermann Weyl. Ici le conceptuel c'est la structure abstraite qui décrit les

---

[152] Cf., plus bas p104, le sens logique d'homogénéité.

relations spatiales objectives dont est muni le continuum tandis que le donné intuitif c'est ce résidu du sujet individuel qui permet d'individualiser les points de l'espace homogène afin de pouvoir ancrer le schème conceptuel des relations spatiales dans la réalité physique à mesurer **:**

> Par cette expression fondamentale de la mesure, je pense qu'on saisit bien d'où vient le rôle des mathématiques dans la connaissance exacte de la nature. *Concernant la mesure, il y a une différence essentielle entre, d'une part, ce qui est « donné » d'un objet par un acte individuel de monstration et, d'autre part, ce qui en est donné par la conceptualisation.* Cette dernière opération n'est toujours possible que relativement à des objets qui doivent être montrés immédiatement. C'est pourquoi on rattache toujours à la mesure une *théorie de la relativité*. Son problème se présente généralement ainsi pour n'importe quel domaine d'objets :
>
> 1) Qu'est-ce qui doit être montré pour que, relativement à cela, et avec un niveau de précision quelconque, on puisse détacher conceptuellement un unique objet P arbitraire du domaine d'objets en question s'étendant continument ? Ce qui permet cette monstration s'appelle le système de coordonnées [.] La définition conceptuelle s'appelle la coordonnée (ou abscisse) de P dans ce système de coordonnées. Deux systèmes de coordonnées sont objectivement tout à fait de même valeur, il n'y a aucune propriété saisissable conceptuellement qui puisse s'appliquer à l'un sans s'appliquer à l'autre ; car, sinon, trop nous aurait été montré immédiatement.
>
> 2) Quel lien fonctionnel existe-t-il entre les coordonnées d'un seul et même objet P dans deux systèmes de coordonnées différents ?[153]

[153] Notre traduction. [RZM 1921, 8] Ce texte fait suite à celui que nous avons cité p99:

> Durch diese prinzipielle Formulierung des Messens, meine ich, wird es begreiflich, wie die Mathematik zu ihrer Rolle in den exakten Naturwissenschaften kommt. *Für das Messen wesentlich ist der Unterschied zwischen dem „Geben" eines Gegenstandes durch individuelle Aufweisung einerseits, auf begrifflichem Wege anderseits.* Das letzte ist immer nur relativ zu Gegenständen möglich, die unmittelbar aufgewiesen werden müssen. Deshalb ist mit dem Messen immer eine *Relativitätstheorie* verknüpft. Ihr Problem stellt sich allgemein für ein beliebiges Gegenstandsgebiet so: 1) Was muß aufgewiesen werden, um relativ dazu auf begrifflichem Wege einen einzelnen, bis zu jedem beliebigen Grad der Genauigkeit willkürlichen Gegenstand *P* aus dem in Frage stehenden, kontinuierlich ausgebreiteten Gegenstandgebiet herauslösen zu können? Das Aufzuweisende heißt das *Koordinatensystem*, die begriffliche Definition die *Koordinate* (oder Abszisse) von *P* in jenem Koordinatensystem. Zwei verschiedene Koordinatensysteme sind objektiv völlig gleichwertig, es gibt keine begrifflich zu erfassende Eigenschaft, welche dem einen zukäme, dem andern nicht; denn dann wäre zu viel unmittelbar aufgewiesen. 2) Welcher gesetzmäßige Zusammenhang findet zwischen den Koordinaten eines und desselben willkürlichen Gegenstandes *P* in zwei verschiedenen Koordinatensystemen statt?

b. L'homogénéité de l'espace : de sa définition logique à sa fonction épistémique

La fin de ce texte montre bien en quoi l'introduction du système de coordonnées, même s'il est une donnée subjective et non conceptuelle, n'abolit pas pour autant l'objectivité du savoir géométrique. En effet, l'introduction d'un système de coordonnées est nécessaire pour la mesure physique en tant que celle-ci est effectuée par un *sujet individuel occupant une place singulière dans le monde*. Mais elle n'est légitime qu'en raison de l'indifférence des différents systèmes de coordonnée pour représenter un même système de relations géométriques objectives. On va voir que cette indifférence dans le choix du système de coordonnées n'est en fait qu'une autre façon d'interpréter l'homogénéité de l'espace que nous avons rencontrée comme propriété essentielle de l'espace comme *forme*. Il est temps de détailler ce que signifie cette homogénéité et de voir en quoi elle joue, sous la forme du *principe de relativité de la mesure*, le rôle d'une condition de possibilité de l'objectivité géométrique et participe à donner à l'épistémologie de la géométrie de Weyl un tour idéaliste.

La notion d'homogénéité est fondamentale pour Weyl pendant toute la période 1917-1923 où il étudie en profondeur la notion d'espace. On peut distinguer trois aspects sous lesquels on peut appréhender cette notion chez Weyl : son aspect logique, sa fonction épistémique à l'égard de la notion d'espace, et les expressions mathématiques déterminées de cette homogénéité. Développons ces trois points. L'ordre de présentation sera : la notion logique, puis ces déterminations mathématiques et, pour finir, la fonction épistémique de la notion d'homogénéité.

La notion d'homogénéité a d'abord une signification purement logique qui est capturée dans le texte suivant extrait du *Continu*[154] :

[154] Notre traduction de [Weyl 1918a, 9] :

> Dem Fall, wie er in der Arithmetik vorliegt, daß alle Gegenstände der betrachteten Kategorie „Individuen" sind (in der hier genau bezeichneten Bedeutung), steht der andere diametral gegenüber, daß jedes eine einzige Leerstelle enthaltende Urteilsschema E{x). das ohne Anwendung von Pr. 5 aus den Ur-Eigenschaften und –Beziehungen entspringt, immer entweder für *alle* oder *keinen* Gegenstand wahr ist. Dann werden wir unsere Kategorie (hinsichtlich dieser Ur-Eigenschaften und -Relationen) als *homogen* bezeichnen dürfen. Dieser Fall liegt z. B. für die Raumpunkte der Euklidischen Geometrie vor, und aus keinem andern Grunde nennen wir den Raum in der Geometrie homogen.**) […]
>
> **) Das Verhältnis dieser *begrifflichen* zur *anschaulichen* Homogenität des Raumes lasse ich unerörtert.

> Il y a un cas diamétralement opposé à celui qui advient en arithmétique, où tous les objets de la catégorie considérée sont des « individus » […] [C'est] celui où chaque schéma de jugement E{x} contenant un unique argument, et émergeant des propriétés (et relations) de jugements [primitives], sans l'utilisation de la règle 5, est ou bien vérifié par *tous* les objets [de la catégorie] ou bien par *aucun*. Alors, nous sommes autorisés à désigner notre catégorie (vis-à-vis de ces propriétés et relations) comme *homogène*. Ce cas advient par exemple pour l'espace des points de la géométrie euclidienne, et il n'y aucune autre raison pour laquelle nous nommons l'espace de la géométrie homogène. **)[…] **) Je laisse à la discussion les relations entre cette homogénéité *conceptuelle* et l'homogénéité *intuitive* de l'espace.

Dans *le Continu*, les propriétés et relations associées à une catégorie d'objets mathématiques sont construites à partir de propriétés et relations primitives par l'usage de 6 principes logiques de construction que nous n'avons pas ici à détailler. Il s'agit de règles similaires à celles qui permettent de construire toutes les formules d'un langage du premier ordre (i.e. d'une théorie basée sur la logique des prédicats du premier ordre). Une catégorie est homogène si aucune des propriétés (à un seul argument) envisageables à propos des objets de cette catégorie, ne permet de distinguer un individu ou un ensemble de tels individus du reste de ceux de la catégorie. La précaution prise par Weyl d'exclure dans cette définition la possibilité de l'utilisation de son principe n°5 est essentielle. Il s'agit du principe logique qui permet d'introduire, à la place d'un argument d'une relation, une constante d'objet (pour parler le langage usuel de la logique) qui fonctionne comme un nom propre désignant directement un individu de la catégorie sans spécifier une de ses éventuelles propriétés individuantes. L'exemple pris par Weyl d'une telle catégorie homogène est l'espace de la géométrie euclidienne. On comprend sur ce cas précis la signification de cette exclusion du principe 5. En géométrie, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, l'origine d'un système de coordonnées est un point (donc un individu de la catégorie) qui ne possède aucune propriété que ne possèdent pas tous les autres points et qui pourrait servir à l'individualiser. C'est pourquoi Weyl parlait d'un acte de monstration comme seul moyen de se « donner » un système de coordonnées. On voit ici que, du point de vue logique, cet acte de monstration joue exactement le rôle d'un nom propre. C'est une désignation référentielle non conceptuelle qui doit être exclue de la définition de l'homogénéité, par le biais ici de l'interdiction de l'utilisation du principe n°5.

Une fois cette précaution prise, non seulement la définition logique de l'homogénéité s'applique à la catégorie des points de la géométrie euclidienne, mais, précise Weyl, c'est la seule raison pour laquelle l'espace de la géométrie *en général* (c'est du moins notre interprétation) est dit « homogène ». Nous allons voir en effet que cette propriété logique de l'espace n'est pas une propriété accessoire rencontrée par certains types d'espaces mathématique à l'exclusion d'autre. Elle joue dans l'épistémologie de Weyl le rôle d'un réquisit qui a une fonction épistémique forte. Voyons d'abord comment se décline cette homogénéité dans les différents espaces rencontrés en géométrie, ce qui nous amène simultanément à considérer la façon dont se décline le sujet-coordonnées à l'intérieur de chacune de ses strates.

c. Caractère transversal des notions d'homogénéité et de sujet-coordonnées chez Weyl

Si on en reste aux géométries qu'on appelle usuellement « synthétiques », qui sont considérées par Weyl comme des Ferngeometrie, et sont les seules dont il soit question dans le premier chapitre *d'Espace-Temps-Matière* et dans *Le Continu,* alors la façon dont cette exigence d'homogénéité va se manifester dans les différentes strates de la notion mathématique d'espace est simple. La force de Weyl est d'arriver à penser de manière unifiée l'ensemble des strates de la notion d'espace sous le concept de forme homogène par l'usage d'une notion générale de sujet-coordonnées qui traverse les différentes strates. Cette notion transversale de sujet-coordonnées est celle exprimée dans le texte cité p102. L'exigence d'homogénéité de l'espace chez Weyl ne joue pas seulement à l'égard de la seule catégorie des *points* de l'espace mais plus généralement (et c'est ce point qui nous semble plus fondamental) à l'égard de la catégorie de tous les *sujets-coordonnées* susceptibles d'être introduits. C'est ce que dit clairement le texte de la p102. La possibilité de mettre sur le même plan les points de l'espace et le sujet-coordonnées repose sur leur similarité de nature. Le sujet-coordonnées serait de nature parfaitement ponctuelle si on pouvait le réduire à la seule origine du repère.

La façon dont Hermann Weyl définit cette notion transversale de système de coordonnées consiste à dire qu'il est à chaque fois (i.e. dans chaque strate de la notion mathématique d'espace) le minimum que l'on doit se *donner* (monstration) pour pouvoir repérer individuellement chaque point de l'espace par une étiquette numérique qui est sa coordonnée. Ce minimum est en même temps un maximum dans le sens où, pour déterminer la nature du système de coordonnées dans la strate spatiale considérée, on part d'un simple point (l'origine des coordonnées) et on y ajoute des structures (par exemple d'autres points) jusqu'à ce que cette donnée suffise à l'individuation de tous les points de l'espace par des propriétés faisant intervenir à la fois les concepts spatiaux généraux correspondant à cette strate et le sujet-coordonnées ainsi introduit. Une fois que ce système de coordonnées est constitué, si on lui ajoute des structures inutiles, on le rend distinguable d'autres systèmes du même type et, du coup, il n'est plus lié au seul sujet-coordonnées. La distinction nette entre le conceptuel et le donné intuitif s'estompe alors. Pour reprendre les termes du texte (cf. p102) « trop nous aurait été montré immédiatement ».

Prenons des exemples simples. D'abord au niveau affine. Il est remarquable que, dans son paragraphe sur la géométrie affine, Hermann Weyl, après avoir donné son axiomatique pour un espace vectoriel, introduise immédiatement une nouvelle catégorie, les « points », et donne les propriétés structurelles qu'ils doivent entretenir avec les vecteurs[155]. Cela revient au passage d'un espace vectoriel à un espace affine. La nécessité de ce passage est claire. Un « espace » vectoriel n'est précisément pas un espace au sens strict de Weyl d'une forme homogène. L'élément neutre de l'espace vectoriel, qui en termes géométriques correspond au déplacement nul, autrement dit à l'identité dans l'espace, est individualisé par rapport aux autres vecteurs. Le passage à la géométrie affine a précisément pour fonction de se libérer de cette singularité d'une origine, pour parvenir à un espace de points dont les relations dérivent de la structure vectorielle, mais qui est rigoureusement homogène au sens logique du terme.

Une fois cette structure atteinte, si on veut introduire un système de coordonnées pour pouvoir individualiser tous les points de notre espace affine, il faudra se donner (n+1) points $O,A_1…A_n$ (n étant la dimension de l'espace affine) tels que le système vectoriel $\{\overrightarrow{OA_1}, …, \overrightarrow{OA_n}\}$ soit libre (au sens usuel de l'algèbre linéaire) et donc forme une base. Ici les clauses de minimalité et de maximalité dont parle Weyl pour introduire sa notion générale transversale de système de coordonnées prennent le sens bien connu habituel en algèbre linéaire. Un système plus petit tel que $\{O,A_1…A_{n-1}\}$ ne permettrait pas d'individualiser tous les points de notre espace mais seulement d'un hyperplan tandis qu'un système de points plus important $\{O,A_1…A_{n+1}\}$ vérifie certaines propriétés que n'ont pas d'autres systèmes $\{O',A'_1…A'_{n+1}\}$. En effet, de part la supposition de la dimension *n* de l'espace, il existe une relation du type :

$$\overrightarrow{OA_{n+1}} = \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + … + \lambda_n\,\overrightarrow{OA_n}$$

où le système de *n+1*-réels $\lambda_1,…, \lambda_n$ est unique pour un n+2-uplet de points donné, mais varie d'un n+2-uplet à un autre. Ainsi avec n+2 points $\{O,A_1…A_{n+1}\}$, « trop nous aurait été donné immédiatement ». Il faut se contenter de n+1 points, c'est-à-dire du plus grand n-uplet de points (vérifiant les bonnes propriétés d'indépendance) à l'égard desquels l'espace reste homogène. Bien sûr, les $\lambda_1,…, \lambda_n$ qui sont apparus ci-dessus seront les coordonnées du point $A_{n+1,}$ que nous excluons finalement hors du système de coordonnées. On voit mieux se dessiner la notion générale du système de coordonnées comme étant *la structure la plus grande à l'égard de laquelle l'espace reste homogène et qui, par sa maximalité, peut permettre d'identifier tout point rajouté au système.*

Si on régresse (en terme de richesse de structure) de la strate affine à la strate projective[156], le système de coordonnées devra, pour une même dimension *n* de l'espace,

---

[155] Deux propriétés suffisent : deux points A et B doivent déterminer univoquement le vecteur $\overrightarrow{AB}$, et la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, représentés par 3 points, doit être le vecteur $\overrightarrow{AC}$ (relation dite 'de Chasles').

[156] Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'espace projectif associé à un espace vectoriel de dimension fini. Un tel espace est employé par Hermann Weyl à l'occasion de sa construction du « réseau de Möbius » en

comporter un point de plus, et la clause d'indépendance linéaire devra être remplacée par une clause de non alignement des points. Mais la définition générale de Weyl fonctionne bien. L'espace est bien homogène vis-à-vis de ces (n+2)-uplets de points non alignés dont chacun suffit à individualiser tous les points de l'espace.

Si on passe par contre à la strate métrique[157], au sens où on munit notre espace d'une forme quadratique, les choses se compliquent. Hermann Weyl montre qu'on se place alors devant une alternative. Le choix le plus simple consiste à remarquer que la forme quadratique que l'on s'est donnée permet de différencier une certaine classe parmi la classe des systèmes de coordonnées de l'espace affine sous-jacent : la classe des systèmes orthonormés. Alors, la définition générale de Weyl fonctionne bien. Dans un espace euclidien à n-dimensions, chaque système de n+1 points {O, $A_1 \ldots A_n$} tel que le système de vecteurs $\{\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}\}$ soit une base orthonormée ne peut être distingué des autres du même type, et il suffit à coordonner l'ensemble de l'espace. L'espace euclidien est bien homogène à l'égard de ces systèmes de points et la forme quadratique est caractérisée dans ces systèmes par une valeur matricielle fixe : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (exprimée ici pour un espace 3-dimensionnel). Ce cas se généralise sans problème à l'espace de Minkowski ou plus généralement à un espace affine n-dimensionnel muni d'une forme quadratique non dégénérée d'une signature quelconque.

Mais Hermann Weyl indique une autre direction qu'il développe pour l'espace euclidien parce qu'elle est deviendra naturelle dans le cadre des espaces de Riemann et de la théorie de la relativité générale à laquelle il veut aboutir. Pour bien saisir cette autre voie, il faut considérer qu'en un certain sens, la métrique n'y est plus considérée comme une donnée intrinsèque à la notion d'espace mais comme une structure supplémentaire qui vient s'y ajouter pour enrichir la structure proprement spatiale. C'est en fait la structure affine sous-jacente que l'on continue à considérer comme « notre espace », au sens d'Hermann Weyl d'une forme qui est homogène à l'égard de tous les systèmes de

---

[Weyl 1923, 4-6]. Cette construction figure dans l'annexe I. de la 4ème édition d'*Espace-Temps-Matière* [RZM 1921, 185-186] sans qu'Hermann Weyl n'y développe l'idée de l'espace projectif.

[157] On emploiera souvent dans notre travail le terme d'« espace métrique » ou de « niveau métrique » pour parler d'un espace affine muni d'une forme quadratique, ce qui correspond dans une autre terminologie aujourd'hui courante à la notion d'un espace préhilbertien (dans le cas où la forme est définie positive). Dans cette autre terminologie, le terme de « métrique » désigne une structure plus générale : celle d'un espace E muni d'une distance (application de ExE dans les réels, définie positive, vérifiant l'égalité triangulaire). La terminologie que nous avons choisie est cependant fréquente quand on parle de la théorie de la relativité du fait que, dans le cadre de la géométrie riemannienne qui est pertinente pour cette théorie, on parle souvent de « métrique riemannienne » là où il s'agit plus précisément d'un champ de formes différentielles quadratiques non dégénérées de signature + - - -, définies sur une variété différentiable.

coordonnées. Autrement dit, ce sont les systèmes de coordonnées affines que nous continuons à regarder comme pertinents. La métrique de l'espace euclidien est alors déterminée par une matrice $\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$ définie positive dont les coefficients sont des constantes sur toute l'étendue de l'espace, mais *dépendent du sujet-coordonnées de la façon bien connue en algèbre linéaire.* La variabilité des coefficients est précisément le signe que la classe de tous nos systèmes de coordonnées affines ne serait pas homogène si on n'excluait pas la forme quadratique des propriétés proprement spatiales. Cette possibilité d'exclure la métrique de la notion d'espace à proprement parler prendra tout son sens dans notre deuxième partie, quand nous auront abordé la partie physique[158].

Nous voyons donc bien, sur ces exemples, que la définition générale de Weyl de l'espace comme forme par nature homogène, et sa notion corrélative de sujet-coordonnées, capturent efficacement la notion d'espace dans ses diverses strates structurelles et permet de penser de façon unifiée les rapports du conceptuel (objectivité des relations) au donné intuitif (subjectivité du système de coordonnées). Cela prépare l'ancrage de cette réalité géométrique objective dans la réalité physique dans laquelle vit le géomètre ou le physicien expérimental.

d. Les structures spatiales données à travers la double interprétation des transformations

Nous avons interprété d'abord l'homogénéité de l'espace, en nous référant à l'objet mû, comme la possibilité pour cet objet de se déplacer d'un point quelconque à un autre point quelconque de l'espace sans perdre son identité géométrique[159]. Cette identité dépend de la strate à l'intérieur de laquelle on se place (affine, métrique…). Ainsi, par exemple, la nature d'un tenseur dans une géométrie métrique diffère de celle qu'on aurait dans une géométrie affine. En tant qu'elle se rapporte à l'objet, appelons « objectuelle » une telle interprétation, pour éviter le couple subjectif/objectif trop chargé en connotations et dont nous nous servons par ailleurs. Nous avons ensuite vu une interprétation « subjectuelle » qui lie l'homogénéité à la place du sujet-coordonnées. Selon cette nouvelle interprétation, l'homogénéité de l'espace exprime la possibilité de représenter un même objet depuis une multiplicité de sujets-coordonnées « objectivement équivalents », c'est-à-dire qui sont des points du vue indifférents pour exprimer la même réalité objective.

[158] Cf. III. 3.

[159] Cf. II.2.b. p93

Cette double interprétation des transformations spatiales soit comme déplacement de l'objet dans l'espace, soit comme changement de coordonnées en vu de la description d'un même objet supposé immobile, revient souvent dans les textes d'Hermann Weyl[160]. On voit ici que, pour Hermann Weyl, la possibilité de passer indifféremment d'une interprétation à l'autre est permise par le fait que le sujet-coordonnées n'est pas une entité hors de l'espace ayant une nature radicalement différente des objets qu'on y définit. L'origine des coordonnées qui sert à déterminer le sujet-coordonnées n'est rien d'autre qu'un point géométrique de même statut que ceux qu'on rencontre comme points de départ ou d'arrivée du déplacement d'un objet géométrique. Le sujet-coordonnées n'est donc pas à penser dans une opposition à l'objet (géométrique), contrairement au type d'opposition sujet/objet qu'on trouve dans une pensée idéaliste classique. L'objectivité est ici permise par le fait que le sujet explicite la place individuelle qu'il occupe dans le monde pour mieux pouvoir ensuite s'en abstraire. Cette équivalence entre « déplacement » du sujet-coordonnées, et « déplacement » de l'objet géométrique, préfigure l'équivalence entre déplacement de l'observateur et déplacement du système observé dans le cadre physique relativiste. Enfin, remarquons que, quand nous aborderons en III.2. la distinction entre transformation passive et transformation active de l'espace, nous verrons transposée dans un nouveau cadre cette possibilité de passer indifféremment d'une interprétation objectuelle à une interprétation subjectuelle des transformations.

---

[160] Par exemple, Hermann Weyl introduit cette distinction à propos des transformations d'un espace affine :

> [Les formules de transformation pour les coordonnées sont donc linéaires […] Elles] *admettent encore une autre signification*. Elles peuvent être comprises comme la représentation d'une correspondance affine dans un système de coordonnées déterminé. Une correspondance qui associe à chaque vecteur **x** son « image », le vecteur **x'**, et à chaque point P son image, le point P', est dite linéaire ou affine si [les relations fondamentales décrites par l'axiomatique des espaces affine] persistent entre les images, quand elles ont lieu entre les objets de départ.

Nous soulignons. Notre traduction de [RZM 1919, 19]:

> Die Formeln (5), (6) lassen noch eine andere Deutung zu: sie können als die Darstellung einer affinen Abbildung in einem bestimmten Koordinatensystem aufgefaßt werden. Eine Abbildung, d. i. ein Gesetz, das jedem Vektor **x** einen »Bild«-Vektor **x'**, jedem Punkt P einen »Bild«-Punkt P' zuordnet, heißt linear oder affin, wenn durch die Abbildung die affinen Grundbeziehungen (1) nicht zerstört werden […]

La deuxième interprétation des changements de coordonnées affine qu'introduit ici Weyl correspond bien à ce que nous avons appelé une 'interprétation objectuelle' dans la mesure où les « points images » et les « vecteurs images » par l'application introduite peuvent être compris comme les résultats du déplacement des points et vecteurs initiaux.

e. L'abstraction mathématique, base logique du jeu géométrique entre objets et sujets-coordonnées

La structure de l'espace peut être donnée, dans chacune de ses strates, selon deux méthodes différentes que nous nommerons « abstraite » et « concrète ».

D'abord, en tant que les transformations spatiales sont des objets géométriques à part entière, la structure de leurs relations peut être étudiée de façon axiomatique. Cette méthode est alors appelée « abstraite » dans la mesure où elle se passe de la donnée individuelle explicite d'un système de coordonnées. C'est le cas de la caractérisation que donne Weyl de la strate affine par le biais de l'axiomatique des espaces affines. Plus précisément, l'axiomatique des espaces affines est bien une méthode abstraite en tant qu'elle est une caractérisation de la structure affine qui se passe de l'explicitation d'un système de coordonnées. Elle ne décrit certes pas les relations qu'entretiennent entre elles toutes les transformations affines, mais seulement la sous-classe des *translations* (affines). Cette restriction n'a cependant pas d'influence sur notre propos.

Mais il y a une deuxième façon de procéder. Restons sur l'exemple de la strate affine. Nous pouvons alors décrire *concrètement* le groupe des transformations de notre espace, en se donnant un système de coordonnées et en exprimant les transformations affines comme un changement de coordonnées, un passage de ce système de coordonnée primitif vers un autre. C'est ainsi qu'à la suite de sa caractérisation abstraite des espaces affines[161], Weyl donne une nouvelle caractérisation en affirmant que, si l'espace y est paramétré par l'intermédiaire d'un système de coordonnées à 3 variables x_i (i=1 à 3), alors le passage à un autre système de coordonnées affine à 3 variables x'_i (i=1 à 3) sera exprimé par une égalité pouvant être écrite sous forme matricielle comme ceci :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x'_1} \\ \boldsymbol{x'_2} \\ \boldsymbol{x'_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(avec } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\text{)}$$

On vérifie que ces transformations forment bien un groupe[162].

---

[161] [RZM 1919, 18-19]

[162] En langage moderne, le groupe caractérisant les transformations affines dans l'espace affine de dimension 3 s'écrira en coordonnées comme le produit semi-direct du groupe (R^{3*3}, *) des matrices carrées (* multiplication matricielle) par le groupe (R^3, +) (représentant les translations affines) pour le morphisme de groupe (R^{3*3}, *)$\rightarrow$Aut(R^3, +), qui à

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ associe l'application } \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$$

Dans cette seconde façon de présenter la géométrie, l'objectivité géométrique n'est plus gagnée d'emblée par la forme abstraite des relations mais par le fait que la singularité du sujet-coordonnées introduit est neutralisée par l'homogénéité de l'espace (indifférence à l'égard de cette singularité) qui se concrétise par la considération de règles de symétries. Le terme de « symétrie » sert à désigner ici les transformations laissant invariantes les structures de notre espace. Ainsi, on est amené à expliciter le groupe des changements de coordonnées permettant le passage d'un sujet-coordonnées à l'autre (c'était la demande de la fin du texte cité p102), et à expliciter la façon dont les représentations numériques de tout objet spatial varient dans le passage d'un sujet-coordonnées à l'autre, selon des lois invariables dépendant de la nature spatiale de cet objet (cf. notre annexe (II.5.) ci-dessous)

La possibilité même en géométrie de pouvoir passer alternativement entre le point de vue abstrait et le point de vue concret est pour Weyl ce qui permet aux objets mathématiques, qui peuvent être étudiés abstraitement par le mathématicien à l'aide d'axiomes et de raisonnements déductifs, de pouvoir après coup être *appliqués à la réalité physique concrète* par la donnée d'un système de coordonnées. Ainsi, un programme de fondement des mathématiques qui puisse être une première étape vers une philosophie de la nature, ce qu'est *Le Continu*, doit penser l'abstraction mathématique non pas comme une propriété qu'auraient les objets mathématiques d'être coupés de tout rapport concret au monde, mais comme un *processus* qui n'atteint l'abstrait qu'en partant d'objets concrets et en neutralisant leur singularité par la considération des symétries. Pour penser l'objectivité de la géométrie, il ne faut donc jamais penser l'abstrait dans une opposition frontale au concret mais comme le résultat d'une genèse, d'un processus qui part du concret. Et, en tant que l'objet concret est pour Weyl donné depuis un point de vue subjectif (le système de coordonnées arbitraire), ce processus du concret vers l'abstrait est en même temps un processus du subjectif vers l'objectif. Il permet de penser l'objectivité comme intersubjectivité.

C'est ainsi qu'on voit Hermann Weyl, dans *Le Continu*, se porter en faux contre une déviance dans les mathématiques de son temps qu'on trouve principalement dans la théorie cantorienne des ensembles et dans l'utilisation de la notion « tout à fait vague » de fonction comme « correspondance quelconque », attribuée à Dirichlet. Cette déviance contre laquelle se place Weyl est celle de l'utilisation d'entités mathématiques qui seraient abstraites au sens où aucune caractérisation conceptuelle ne puisse permettre de les caractériser à travers la donnée d'un système de coordonnées. Tels sont, par exemple, les « réels » non définissables qui doivent être infiniment plus nombreux que les autres selon la théorie cantorienne, ou encore les fonctions non définissables par une formule[163].

[163] Nous faisons référence au théorème suivant en théorie des ensembles. On sait, d'après Georg Cantor, que l'ensemble des réels est non dénombrable. Or l'ensemble des formules de notre langage mathématique

En opposition avec cette approche, Hermann Weyl développe une conception des objets mathématiques qui n'acquiert un niveau d'abstraction que par un *processus* qui part du niveau intuitif primitif. A ce niveau primitif, on ne dispose que de relations entre objets concrets de notre domaine (notons que cette « concrétude » n'est que relative puisque, dans le cas de la géométrie il s'agit de « points »). Un objet mathématique abstrait ne peut être obtenu qu'à partir de ces relations primitives entre objets concret par le *processus mathématique*. Il s'agit dans chaque cas de voir qu'on dispose d'une pluralité d'objets concrets qui répondent tous à une même propriété fixée. Le processus mathématique consiste alors à penser ces objets comme des instances d'un seul et même objet abstrait, l'« ensemble » qui, dans le langage des logiciens, est l'extension de cette propriété. Ce sont les définitions par les *classes d'équivalence* qui ont servi de modèle à Hermann Weyl pour penser l'abstraction mathématique.

Nous ne pouvons rentrer ici dans les détails de la façon dont Weyl pense ce processus mathématique. Ce que nous en avons dit suffit à comprendre le rôle que joue cette fondation concrétiste des objets mathématiques dans le programme général d'une épistémologie des sciences qui articule mathématiques et physique. Pour prendre un exemple très simple, la notion abstraite de vecteur donnée par l'axiomatique n'a de valeur pour une science de l'espace que parce qu'elle a été dérivée du socle intuitif de l'espace affine des points. Pour un sujet-coordonnées donné dans l'espace affine, une translation de l'espace sera exprimée par la façon dont elle déplace son point origine O_1 vers un point O_1'. Pour un second sujet-coordonnées, cette même translation sera exprimée par la façon dont elle déplace l'origine O_2 de ce second système de coordonnées vers un point O'_2. L'idée abstraite, et par-là même objective, du « vecteur déplacement » dans un espace affine doit alors s'appuyer sur ce socle intuitif dans la mesure où elle doit être obtenue comme une classe d'équivalence de ces bipoints qui peuvent être donnés au niveau concret de la description des points spatiaux depuis un sujet-coordonnées. Ainsi peut-on voir le lien entre les recherches du *Continu* et celles d'*Espace-Temps-Matière*. L'exigence de penser en mathématiques l'abstraction comme un processus à partir du socle intuitif est le corrélat nécessaire d'une fondation de la physique mathématique où les grandeurs physiques, pour abstraites qu'elles soient, doivent dériver des mesures concrètes effectuées par le sujet observateur, leur objectivité étant alors pensée comme dérivant d'un mouvement de neutralisation de la singularité du sujet-coordonnées par la considération des symétries.

susceptibles de définir un nombre réel est dénombrable. La conclusion, dans la théorie des ensembles, est qu'il existe des réels non définissables et qu'ils sont infiniment plus nombreux que ceux qui sont définissables. Hermann Weyl propose une solution originale dans *Le Continu* pour éviter d'avoir à accepter de tels objets indéfinissables dans son ontologie mathématique. Cf. la façon dont il résout ce qu'il appelle « l'antinomie de Richard » [Weyl 1918a, 19]

f. Nature des objets géométriques

La possibilité de caractériser l'espace de façon alternativement « abstraite » ou « concrète », par la caractérisation du groupe de ses transformations, se répercute ensuite sur la caractérisation des différentes natures d'objets géométriques qui peuvent y être définis.

Ainsi, un objet géométrique pourra, d'une première façon, être défini par composition d'objets géométriques élémentaires. Par exemple, dans la strate affine, les objets les plus simples sont les vecteurs qui sont définissables par le biais d'un déplacement (translation). Puis d'autres objets plus complexes peuvent s'appuyer sur ces objets élémentaires. Ainsi, par exemple, un tenseur est-il une application multilinéaire à valeur vectorielle, etc.

Mais un objet géométrique pourra aussi être introduit par le biais d'un système de coordonnées. Sa nature spatiale, i.e. son mode de dépendance à l'égard de l'espace, consiste alors en la façon dont ses coordonnées sont modifiées dans le passage d'un système de coordonnées à un autre. Hermann Weyl indique cette idée sans développer jusqu'au bout la définition générale qui en découle de ce qu'est un objet géométrique. On retrouvera plus tard cette définition générale chez d'autres auteurs[164]. Nous proposons ci-dessous en annexe (II. 5.) une définition générale de ce qu'est la nature spatiale d'une grandeur, en transcrivant les idées de Weyl dans le vocabulaire moderne des actions de groupe.

Hermann Weyl se contente d'indiquer qu'une relation entre objets géométriques peut être donnée par le biais d'une relation numérique entre leurs valeurs représentatives dans un système de coordonnées donné, pourvu que la relation en question soit invariante par le groupe des transformations de coordonnées. C'est suffisant pour voir comment l'objectivité du savoir sur l'espace, posé par le principe de l'homogénéité *de l'espace*, devient le fondement de l'objectivité des mesures des objets contenus *dans l'espace*. Ici se trouve la *fonction épistémique* de la notion d'homogénéité en géométrie sur laquelle nous allons conclure à présent.

[164] Le développement le plus clair que nous connaissions de cette idée est celui qu'on retrouve chez James Leroy Anderson : *Principles of relativity physics*, New York :Academic Press, 1967.

4. Les éléments idéalistes dans la notion mathématique d'espace

a. Conclusion sur la fonction épistémique de l'homogénéité

Ces développements sur la façon dont l'idée logique d'homogénéité se réalise concrètement à l'intérieur de chaque strate mathématique suffisent à montrer la fonction épistémique que joue la notion d'homogénéité dans la pensée géométrique d'Hermann Weyl. L'homogénéité n'y apparait pas comme une propriété logique de certains espaces mathématiques au détriment d'autres. Elle est bien plutôt une exigence que la raison impose à la notion même d'espace comme une condition de possibilité de son objectivité ; objectivité comprise comme une indifférence à l'égard de la singularité des sujets-coordonnées qui doivent être introduits pour appliquer la géométrie à la réalité effective. Cette indifférence de principe, que Weyl nomme *principe de relativité de la mesure*, s'exprime par le fait que le sujet-coordonnées peut toujours expliciter sa place singulière dans l'univers géométrique. Le sujet-coordonnées étant d'une nature similaire aux objets composants l'espace, on peut décrire par les concepts même de la géométrie la relation objective entre deux sujets-coordonnées, fondant *a priori* la possibilité du passage d'un point de vue à l'autre par la donnée du groupe des transformations, chaque transformation étant interprétée indifféremment comme déplacement respectant la structure de l'espace ou comme changement de coordonnées.

b. Un « idéalisme transcendantal » décrit dans une terminologie renversée

Nous comprenons comment, sur le plan purement mathématique, va se manifester l'idéalisme d'Hermann Weyl dans le sens d'une emprise forte de la raison plutôt que de l'expérience sur le développement de la géométrie. Avant même d'entrer dans l'interaction entre mathématiques et physique, où va se déployer le schéma idéaliste de son épistémologie, Hermann Weyl propose une vision de la notion mathématique d'espace qui insiste sur les principes *a priori* tels que ceux de forme ou d'homogénéité qui sont pensés comme des exigences que la raison pose et qui servent de condition de possibilité à la constitution objective d'une science de l'espace. Le niveau mathématique de la notion d'espace ne consiste pas en un foisonnement désorganisé de constructions de l'esprit entre lesquels l'expérience seule pourra ensuite trancher. Au lieu de cela, la notion mathématique d'espace est fortement contrainte par des exigences de la raison qui sont des conditions *a priori* pour que les constructions géométriques puissent servir de fondement à une science physique de l'espace accompagnée d'une théorie de la mesure.

Nous faisons donc un premier pas pour rejoindre l'interprétation de Thomas Ryckman en voyant dans l'épistémologie de la géométrie d'Hermann Weyl une forme d'idéalisme transcendantal dans le sens général qu'il donne à ce mot. Mais il ne faut pas chercher cet idéalisme dans les passages où Hermann Weyl soutient expressément le caractère idéal de l'espace en le qualifiant de « forme des apparences ». En effet, dans ces passages, Hermann Weyl n'a pas en tête une notion de sujet transcendantal, mais plutôt sa propre notion de sujet comme sujet-coordonnées introduisant un point de vue arbitraire dont on doit se défaire pour atteindre l'objectivité. Ainsi, en affirmant l'idéalité de l'espace, Hermann Weyl entend défendre le fait que l'objectivité ne doit se gagner qu'en se libérant de la singularité arbitraire du système de coordonnées. Cette libération est permise par l'homogénéité de l'espace qui est une sorte de prémisse mathématique du principe physique de relativité, tout comme l'était le principe de covariance pour Einstein. Par ce glissement du sens de la notion de sujet dans l'affirmation de l'idéalité de l'espace, Hermann Weyl passe de Kant à Einstein. Quand Hermann Weyl affirme l'idéalité de l'espace, il ne se réfère généralement pas aux structures conceptuelles de la géométrie, mais plutôt à la singularité des systèmes de coordonnées qui servent à les décrire.

Quand les systèmes de coordonnées reçoivent leur signification physique, cette idéalité de l'espace se manifestera notamment par le fait que l'origine des coordonnées n'a pas de signification physique. Il n'y a pas plus de raison objective de privilégier un point de l'espace (principe de relativité de l'espace) qu'il n'y a de raison de privilégier un moment du temps (principe de relativité du temps). La réalité physique ne connait ni Ici, ni Maintenant ayant un sens objectif et Weyl défend alors, sous les termes de l « 'idéalité de l'espace et du temps », ce qu'on appellerait aujourd'hui une conception de l'univers-bloc, conception que Weyl partage avec Einstein et dont certaines composantes se trouvaient dans la tradition philosophique plus ancienne, notamment chez Leibniz. S'il y a véritablement une forme d'idéalisme transcendantal chez Hermann Weyl, elle doit donc être cherchée ailleurs que dans ces affirmations.

Au niveau purement mathématique, nous avons découvert l'appareil conceptuel que notre auteur met en place pour montrer comment est gagnée en géométrie cette libération à l'égard de la singularité du sujet-coordonnées, ce qu'Hermann Weyl exprime aussi comme une libération à l'égard de l'espace-temps en tant que simple forme des apparences. La possibilité de cette objectivisation est d'abord fondée sur le principe de l'homogénéité de l'espace qui pose l'indifférence de principe du sujet-coordonnées pour penser l'espace. La libération à l'égard du sujet-coordonnées est alors réalisée à l'aide du principe de relativité de la mesure qui permet de penser l'unité de l'objet géométrique à travers ses divers modes de présentation par le jeu de l'abstraction mathématique et de l'explicitation (dans chaque strate de la notion d'espace) du groupe des transformations.

Cet objectivité géométrique se décline alors suivant une pluralité de nature d'objets géométriques (scalaire, vecteur, tenseur, pseudo-tenseur, etc.) qui vont servir de support aux différent modes de rapport à la spatialité que vont pouvoir acquérir les objets de la théorie physique. La position d'Hermann Weyl n'est jusqu'ici pas originale mais repose sur la tradition de la géométrie du dix-neuvième siècle et en particulier sur l'idée fondamentale, qui s'est dégagée des travaux d'Helmholtz et du programme d'Erlangen, de penser de manière unifiée la notion d'espace à partir de la notion d'homogénéité. Hermann Weyl a cependant le mérite de développer ces idées grâce à son analyse détaillée de la fonction du système de coordonnées et par conséquent, des rapports entre intuition et concept, dans la constitution d'une notion mathématique d'espace susceptible de servir de fondement à une théorie de la mesure.

Cependant, il reste deux problèmes majeurs à régler pour saisir le schéma d'ensemble de l'épistémologie de la géométrie d'Hermann Weyl, et en particulier justifier qu'il est une forme d'idéalisme.

Premièrement, il faut remarquer que ces notions générales de forme, et d'homogénéité, pour structurantes qu'elles soient à l'égard de la notion d'espace, ne déterminent pas à elles-seules le choix, dans chacune des strates de la notion d'espace, d'une structure unique caractérisant les relations spatiales objectives. Qu'est-ce qui est au fondement du choix que nous faisons quand nous sélectionnons une structure géométrique déterminée (par exemple, celle déterminée par une forme quadratique définie positive) au sein de la multiplicité des structures répondant à l'exigence générale d'homogénéité ? Y a-t-il *un* « bon » espace, et si oui, lequel est-ce ? Est-ce qu'ici les exigences de la raison doivent céder leur place à une pure détermination par l'expérience ? C'est précisément le *problème mathématique de l'espace* qui occupait Hermann Weyl à la fin de la période 1917-1923, après que les notions générales de la géométrie que nous avons exposées ont été développées (dès la première édition d'*Espace-Temps-Matière*).

Deuxièmement, il y a le problème de savoir si le schéma général que nous avons exposé d'une géométrie comme forme homogène peut résister à la transition d'une Ferngeometrie où les structures sont fixées sur toute l'étendue spatiale, à une Nahegeometrie où, pour prendre le vocabulaire d'Einstein, l'espace en soi devient une sorte de mollusque informe qui ne prend forme que par ses relations avec son contenu. Les réponses à ces deux questions, qui seulement permettront de bien saisir la forme d'idéalisme de la pensée d'Hermann Weyl, ne pourront être exposées qu'après une analyse du niveau physique de la notion d'espace et de la façon dont Weyl comprend les rapports de l'espace à la matière. Nos parties III. et IV. répondent à ces deux questions.

5. **Annexe :** **Comment caractériser la nature spatiale d'une grandeur ?**

Dans *Espace-Temps-Matière*, on ne trouve pas de définition générale de ce que nous pouvons appeler « la nature géométrique » ou « la nature spatiale » d'une grandeur physique. Nous pourrons employer les deux expressions comme synonymes pour signifier le mode de rapport d'une grandeur à l'espace, mode qui s'exprime par la façon dont la représentation numérique de cette grandeur varie en fonction de la façon dont nous coordonnons l'espace. Il s'agit donc d'une notion qui se rapporte à la notion transversale d'espace, et non pas à la strate spécifiquement métrique.

Malgré l'absence de définition explicite dans *Espace-Temps-Matière*, tous les éléments sont là pour en construire une. Notre auteur donne de nombreux exemples d'objets de natures spatiales différentes (point, vecteur covariant, vecteur contravariant, tenseur, tenseur symétrique, tenseur antisymétrique, densité tensorielle, nature spatiale de la connexion affine, etc.[165]) et des exemples de grandeurs physiques admettant chacune de ces natures spatiales. Ainsi, la force, au sens physique usuel est-elle un vecteur covariant[166]. Les déplacements et la vitesse d'un point mobile sont des vecteurs contravariants[167]. Le moment angulaire d'un point mobile par rapport à un point O, ou le moment d'une force sont des exemples de tenseurs antisymétriques à deux indices[168]. L'élasticité d'un corps à l'équilibre sous l'effet de forces extérieures et de forces de tensions internes, est un tenseur symétrique à deux indices[169]. Etc.

La réflexion d'Hermann Weyl dépasse la simple donnée d'exemples. Il donne les éléments essentiels communs à ces exemples permettant de construire une définition générale. En effet, en lien avec les fondements concrétistes des mathématiques qu'Hermann Weyl défend, la structure mathématique abstraite qui représente la nature géométrique

---

[165] Pour la présentation des vecteurs covariants et contravariants, par l'exemple des composantes contravariantes et covariantes des « vecteurs » au sens usuel (translations d'un espace euclidien) : [RZM 1919, 30-32] La définition générale des tenseurs dans l'espace euclidien : [RZM 1919, 33] La définition locale des tenseurs (en un point d'une variété) : [RZM 1919, 92-93] La définition d'une densité tensorielle : [RZM 1919, 98] La définition d'une connexion affine et de sa dépendance aux coordonnées: [RZM 1919, 100-102]

[166] [RZM 1919, 34]

[167] [RZM 1919, 33-34]

[168] [RZM 1919, 41]

[169] [RZM 1919, 54-55]

d'une grandeur physique doit pouvoir être exprimée concrètement par la donnée de valeurs numériques, sitôt qu'on s'est placé dans un système de coordonnées.

Définir la nature géométrique d'une grandeur suppose donc déjà que l'on fixe l'ensemble des valeurs possibles que peut prendre cette grandeur. Ecrivons cela dans un langage moderne. Par exemple, si nous voulons définir ce qu'est un vecteur à n composantes, cet ensemble sera R^n. Si nous voulons définir ce qu'est un champ de tenseurs doublement covariants dans une variété V de dimension n, cet espace sera $(R^{(n^2)})^V$, l'ensemble des fonctions de V dans l'ensemble des n^2-uplets de nombres réels.

Appelons « C » (comme « Coordonnées ») cet espace des différentes représentations possibles d'un objet spatial.

Maintenant, comme le montre abondamment Weyl dans *Espace-Temps-Matière*, ces valeurs numériques n'ont en elles-mêmes aucune valeur objective puisqu'elles dépendent du point de vue subjectif représenté par le système de coordonnées. Ces valeurs vont varier d'un sujet-coordonnées à l'autre. L'objectivité n'est gagnée que parce que nous connaissons la loi qui permet de passer des valeurs de la grandeur dans un système de coordonnées à ces valeurs dans un autre. C'est le deuxième réquisit du principe de relativité de la mesure. (cf. ci-dessus p102) Outre par l'ensemble de ses valeurs possibles, la nature d'un objet géométrique est donc donnée par la loi qui permet de passer de ses valeurs dans un système de coordonnées à ses valeurs dans un autre système de coordonnées, sitôt qu'on connait la relation entre ces deux systèmes des coordonnées.

Si l'espace est représenté par une variété V munie d'un groupe G de transformations, et qu'on dispose de la représentation numérique $v \in C$ d'un objet géométrique dans un système de coordonnées donné, on doit pouvoir connaitre comment cette représentation varie pour devenir $v' \in C$, quand on applique un changement de coordonnée, c'est-à-dire une transformation $f \in G$ de notre espace.

C'est ici que la structure de groupe de l'ensemble des transformations de l'espace intervient. Si on ne change pas le système de coordonnées (application identité), la représentation numérique de notre objet spatial ne doit pas changer. Si on applique deux changements de coordonnées successifs ($x \rightarrow x'$) puis ($x' \rightarrow x''$), les valeurs prises par l'objet doivent être les mêmes que si on avait appliqué l'unique changement de coordonnée ($x \rightarrow x''$). Enfin, si on revient au premier système de coordonnées après un changement de coordonnée, l'objet doit reprendre ses valeurs initiales. Autrement dit, l'intersubjectivité des mesures est permise parce que le groupe G des transformations de l'espace opère (au sens mathématique de l'action de groupe) sur l'ensemble C des représentations de l'objet géométrique. Les différentes natures spatiales (vecteur, tenseur, densité, etc.) correspondent alors aux différentes lois d'action de groupe qu'il peut y avoir entre le groupe G des transformations de l'espace, et l'espace C des valeurs possibles pour notre objet.

Prenons deux exemples.

<u>Vecteur contravariant à 3 indices :</u>

Plaçons-nous dans un espace affine de dimension 3. Le groupe G des transformations spatiales est alors le groupe des applications affines. Une transformation de l'espace est donc une application affine f qui s'exprime en écriture matricielle comme un changement de coordonnées :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

($\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ étant la nouvelle coordonnée du point origine du premier système de coordonnées, et $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ exprimant la partie linéaire de notre application affine)

La nature spatiale d'un vecteur contravariant dans un tel espace est capturée par l'ensemble de ses représentations numériques possibles : R^3, et par la donnée de l'action de groupe suivante :

$$GxR^3 \rightarrow R^3$$

$$\left(f, \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix} \right) \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \end{bmatrix}$$

où $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ exprime la partie linéaire de l'application affine f et * est la multiplication matricielle. Notons que nous n'avons pas respecté ici la position des indices (suivant le type de variance) de par le choix de notre notation matricielle.

Passons au deuxième exemple.

<u>Connexion affine :</u>

Plaçons-nous maintenant dans un espace qui est une variété V, C^2-différentiable et de dimension *n*. Le groupe G des transformations de notre espace est l'ensemble des difféomorphismes (locaux) de classe C^2. Notre changement de coordonnées s'exprime par la donnée, pour chaque ouvert de carte, d'un difféomorphisme de caractère au moins C^2.

La nature spatiale d'une connexion affine dans un tel espace est alors capturée par l'ensemble de ses valeurs C=$(R^{n^3})^V$ (champ à 3 indices), et par l'action de groupe suivante :

$$G\mathrm{x}(R^{n^3})^V \to (R^{n^3})^V$$

$$\left[(x \to x'), (x \to \Gamma^i_{jk}(x))\right] \to \left[x' \to \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha}\big(x(x')\big)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}(x')\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^k}(x')\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x(x')) + \frac{\partial x'^i}{\partial x^\delta}\big(x(x')\big)\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^j \partial x'^k}(x')\right]$$

Il est important de noter que la construction que nous avons présentée ici dans le langage moderne des actions de groupe, repose sur le type de processus d'abstraction qu'Hermann Weyl place au fondement de l'analyse mathématique dans *Le Continu*. Ainsi, plusieurs représentations concrètes peuvent être données d'un même objet géométrique dans divers systèmes de coordonnées, mais nous parvenons à connaitre un seul et même objet abstrait derrière ses représentations, par un processus mathématique fondé sur la connaissance de la loi qui relie ensemble ces diverses représentations, cette loi s'exprimant ici mathématiquement par une action de groupe.

Nous pouvons compléter ces développements par la considération des symétries (au sens, par exemple, du caractère symétrique de certains tenseurs). Hermann Weyl remarque que la donnée des lois de transformation des coordonnées d'une grandeur ne suffit pas toujours à caractériser sa nature spatiale. Il faut parfois ajouter des propriétés de symétrie :

> Des exemples du paragraphe précédent, il ressort en toute clarté que les tenseurs doublement covariants symétriques et antisymétriques, représentent, là où ils se présentent, des grandeurs de types entièrement différents. Par conséquent, la nature d'une grandeur n'est pas en général complètement décrite par l'indication qu'elle est un tenseur de tel ordre, mais il faut encore y ajouter des caractéristiques de symétrie[170].

[170] Notre traduction. [RZM 1919, 48]:

> Aus den Beispielen des vorigen Paragraphen geht mit aller Deutlich- keit hervor, daß die symmetrischen und die schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe, wo sie in den Anwendungen auftreten, völlig verschiedene Größenarten darstellen. Der Charakter einer Größe ist demnach im all- gemeinen noch nicht vollständig durch die Angabe beschrieben, sie sei ein Tensor so und sovielter Stufe, sondern es treten Symmetrie-Merkmale hinzu.

Une propriété de symétrie est une propriété invariante par changement de coordonnées. Le nom de « symétrie » provient du fait que les relations de ce type les plus simples qui apparaissent naturellement, sont celles qu'Hermann Weyl considère dans le texte que nous venons de citer : le caractère de symétrie ou d'antisymétrie des tenseurs covariants (ou contravariants, mais non pas mixtes).

Développons ce que cela donne dans le langage plus moderne des actions de groupe. Par exemple, plaçons sur une variété V de dimension n munie du groupe G des transformations de cet espace, s'exprimant par les changements de coordonnées de classe C^1 (difféomorphismes). Dans un tel espace, un champ de tenseurs doublement covariants admet ses représentations numériques dans l'espace $(R^{n^2})^V$ (champ numérique à deux indices). Le groupe des transformations de l'espace agit sur cet espace selon la loi :

$$G\mathrm{x}(R^{n^2})^V \to (R^{n^2})^V$$

$$\left[(x \to x'), (x \to T_{ij}(x))\right] \to \left[x' \to T_{\alpha\beta}(x(x')) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}(x(x')) \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}(x(x'))\right]$$

Si nous prenons un tenseur doublement covariant qui, dans le système de coordonnées initial, s'exprime par une matrice symétrique $T_{ab}(x)=T_{ba}(x)$ (pour tout $x \in V$), alors cette propriété se conserve dans tous les systèmes de coordonnées. On vérifie en effet que l'action d'une transformation quelconque de notre espace préserve une telle symétrie. Cette propriété de symétrie peut alors être considérée non pas comme une simple apparence subjective due au système de coordonnées, mais comme une propriété géométrique objective du tenseur considéré. Elle est donc une considération à prendre en compte pour caractériser la nature spatiale de l'objet, simultanément avec l'action du groupe des transformations sur l'espace de ses représentations numériques.

Ainsi, une fois caractérisée l'action du groupe des transformations de l'espace sur les représentations numériques d'une grandeur, on peut encore attribuer d'autres propriétés géométriques à cette grandeur qui la différencie d'autres grandeurs auxquelles la même action de groupe est associée. Cette possibilité provient du fait qu'il y a plusieurs orbites pour cette action de groupe, et que certaines propriétés exprimables à partir des valeurs numériques de la grandeur considérées, sont ou bien toujours vraies ou bien toujours fausses quand on passe d'une orbite à l'autre. La symétrie ou l'antisymétrie des valeurs d'un tenseur vis-à-vis d'un échange d'indice de même variance est l'exemple le plus évident. Hermann Weyl donne une expression générale pour caractériser tous les types de symétrie de ce genre que l'on peut formuler à propos d'un tenseur[171].

[171] [RZM 1919, 51]

On remarque cependant que d'autres propriétés que celles qui s'expriment comme une combinaison de « symétries » ou d'« antisymétries » vis-à-vis des échanges d'indices peuvent caractériser une orbite au détriment d'une autre, même pour cet objet spatial particulier qu'est le tenseur. Par exemple, dans l'espace des représentations numériques d'un tenseur doublement covariant, on peut se donner comme propriété supplémentaire que ce tenseur soit représenté par une matrice non dégénérée. Ce type de propriété est bien conservé par notre action de groupe. C'est ce qui permet d'obtenir la nature géométrique des métriques pseudo-riemannienne $g_{\mu\nu}$. Dans l'espace des représentations numériques d'un tenseur doublement covariant « non dégénéré », on peut encore distinguer autant d'orbites qu'il y a de possibles « signatures » pour ce tenseur interprété comme une forme quadratique.

Pour éviter d'avoir à ajouter ces propriétés géométriques comme des suppléments à côté de l'action de groupe (sur l'espace des représentations), il suffit techniquement de restreindre dès le départ notre espace de représentations pour qu'il corresponde à l'orbite qui nous intéresse. Par exemple, si on veut caractériser la nature géométrique d'un tenseur symétrique doublement covariant, on ne considérera pas que l'espace des représentations est R^{n*n} tout entier, mais seulement le sous-espace de R^{n*n} constitué des matrices symétriques. Cependant, le fait d'effectuer la démarche en deux temps, prenant d'abord l'espace des représentations le plus général, puis en se donnant ensuite les propriétés de symétries, permet de saisir une parenté de nature entre deux types d'objets géométriques. Ainsi, même s'ils diffèrent du point de vue de leurs symétries, les tenseurs doublement covariants symétriques et les tenseurs doublement covariants antisymétriques partagent-ils la même loi de transformation dans le passage d'un système de coordonnées à l'autre.

Une dernière complication peut survenir pour le cas particulier de la caractérisation de la nature géométrique des tenseurs dans un espace métrique. En effet, Hermann Weyl remarque, comme il est bien connu, que cela n'a le même sens de préciser la variance d'un tenseur dans un espace métrique ou dans un espace seulement affine. Dans un espace affine, les tenseurs covariants et les tenseurs contravariants correspondent bien à deux natures géométriques objectivement différentes. Par contre, dans un espace métrique, le caractère covariant ou contravariant est un simple effet de représentation puisqu'on peut passer de la représentation covariante à la représentation contravariante d'un tenseur en le multipliant et en le contractant avec le tenseur métrique g^{ab} [172]. Cela montre simplement que, derrière plusieurs actions de groupe différentes, peuvent se tenir une seule et même nature géométrique. Ainsi, si l'action de groupe est une façon adéquate d'exprimer la nature spatiale d'une grandeur, cette expression n'est cependant pas univoque.

[172] Il s'agit évidemment du tenseur métrique d'un espace de Riemann.

Ce problème particulier des représentations covariantes ou contravariantes d'un *même* tenseur disparait si on choisit un système de coordonnées orthonormé et qu'on restreigne bien notre groupe des transformations aux seules transformations orthogonales. Cette restriction est naturelle si on considère les propriétés métriques comme d'authentiques propriétés intrinsèques à l'espace. Alors la différence entre expression covariante et expression contravariante des tenseurs disparait.

Partie III Réflexions philosophiques sur l'aspect physique des relations spatiales

1. L'interaction entre l'espace-temps et la matière comme problème pour une interprétation idéaliste de la théorie de la relativité générale

Notre deuxième partie a présenté, développé et replacé dans son contexte d'apparition, un certain nombre de notions qui participent dans la pensée d'Hermann Weyl à l'élaboration d'une notion d'espace dont le statut est *a priori* au sens où son architecture est dominée par un réquisit d'homogénéité qui est une condition de possibilité de l'objectivité géométrique, et dont la nature peut être fixée *a priori* par une axiomatique développant le groupe homogène des transformations préservant les structures spatiales. Nous avons insisté sur le fait que l'idéalisme dans la position d'Hermann Weyl n'est pas à chercher dans le fait qu'il qualifie l'espace de « forme des apparences » ou « forme de notre intuition », mais plutôt (mais pas seulement) dans la fonction épistémique essentielle qu'il fait jouer à ce réquisit d'homogénéité, exigence pour satisfaire la raison.

Qu'Hermann Weyl développe une position idéaliste de l'espace est étonnant, de prime abord, de la part d'un promoteur de la théorie de la relativité générale. Il n'est certes pas le seul à proposer une lecture qu'on peut qualifier globalement d' « idéaliste » de la théorie de la relativité générale. Cependant, l'interprétation de la théorie par Hermann Weyl dans *Espace-Temps-Matière* a ceci de particulier qu'il place au cœur de sa réflexion le rapport qu'elle introduit entre d'une part les propriétés métriques et, d'autre part, les forces 9gravitationnelles agissant sur la matière. Autrement dit, le point de la théorie qu'Hermann Weyl met en exergue est précisément celui qui pose le plus de problème à une interprétation idéaliste. Car si les relations métriques sont les composantes essentielles de la notion d'espace alors, dans une interprétation idéaliste de la géométrie, ne devraient-elles pas être entièrement fixées par des principes *a priori* tout comme l'est la notion d'espace elle-même ?

En développant la façon dont Hermann Weyl comprend, au sein de la théorie de la relativité générale, les interactions entre la matière et les propriétés affines/métriques de l'espace-temps, notre partie III. va nous faire entrer dans les réflexions philosophiques sur l'aspect *physique* des relations spatiales. Ce faisant, nous poserons les premiers éléments qui permettent de dénouer le paradoxe apparent d'une philosophie de l'espace-temps comme celle d'Hermann Weyl qui mêle un idéalisme (transcendantal) de l'espace avec l'acceptation que les propriétés métriques de l'espace sont déterminées par la réalité physique, c'est-à-dire par la matière qui l'occupe. Cette tension entre, d'une part, un espace homogène fondé sur des principes *a priori* et, d'autre part, des relations métriques déterminées par la répartition hétérogène de la matière ne sera cependant pleinement dépassée que dans notre dernière partie quand la géométrie deviendra « infinitésimale pure ».

2. La matière, facteur de détermination de la métrique

a. Géométrie intrinsèque et géométrie physique : de Friedrich Gauss à Bernhard Riemann

La lecture que propose Hermann Weyl de la théorie de la relativité générale est fortement influencée par la pensée du mathématicien Bernhard Riemann qui avait repensé en profondeur les fondements de la géométrie, au vu des développements de la géométrie différentielle au XIX^ème^ siècle auxquels il avait lui-même activement participé. Hermann Weyl reconnait qu'Einstein n'avait pas été influencé directement par Riemann[173], ne l'ayant pas lu préalablement à l'élaboration de sa théorie. Cependant, pour Hermann Weyl, Riemann avait, dans son texte d'habilitation *Sur les Hypothèses sous-jacentes à la géométrie*[174], donné les arguments corrects permettant d'établir le statut ontologique des relations métriques. Riemann avait montré, par une analyse de nature épistémologique, que la structure des relations métriques de l'espace ne pouvait être entièrement déterminée par une analyse *a priori* de la notion de mesure. Par conséquent, elle devait être partiellement déterminée par la réalité physique, plus précisément par les forces d'interaction de la matière. Sa réflexion finissait ainsi sur un programme de recherche ; un appel à la science physique pour compléter les données de la géométrie mathématique et déterminer, au sein de la multiplicité infinie des espaces courbes logiquement envisageables, un unique jeu de relations métriques correspondant à l'espace « réel ». Pour Hermann Weyl, la théorie d'Einstein complète inconsciemment, près de 70 ans après, ce programme épistémologique

[173] [RZM 1918, 101]

[174] [Riemann 1854]

de Riemann. C'est la théorie de la *gravitation* d'Einstein qui vient finalement remplir la case vide qu'avait réservée Riemann pour la détermination de la métrique par les interactions de la matière.

L'argument épistémologique de Riemann est résumé par Weyl aux paragraphes 11 et §12 d'*Espace-Temps-Matière*[175]. Ces paragraphes sont entièrement consacrés à l'exposition de ce que nous appelons encore de nos jours les « espaces de Riemann », c'est-à-dire la géométrie d'une variété différentiable munie d'une forme quadratique différentielle $g_{\mu\nu}(x)$. Cette géométrie, dans le cours de l'ouvrage, est présentée immédiatement après la discussion sur les géométries non euclidiennes nées de la controverse liée au cinquième postulat d'Euclide. La géométrie de Riemann apparait ainsi comme une deuxième étape à franchir pour dépasser le point de vue euclidien originel du premier chapitre. Fidèle à son habitude, Hermann Weyl présente la géométrie des espaces de Riemann selon un ordre mêlant l'histoire à l'analyse conceptuelle et aux commentaires philosophiques. Il fait remonter aux travaux de Friedrich Gauss l'origine du développement riemannien de la géométrie différentielle[176].

Avant toute considération métrique, l'espace est considéré comme une variété à 3 dimensions. Une variété à *n* dimensions est caractérisée par le fait qu'elle est composée d'éléments pouvant être spécifiés par la donnée de *n* nombres (ses coordonnées) qui sont des fonctions continues sur la variété[177]. Il n'y a généralement pas qu'une seule façon de paramétrer une variété *n*-dimensionnelle. Weyl précise que la notion de paramétrage d'une variété est locale. On n'a pas nécessairement *n* fonctions-coordonnées qui attribuent univoquement un système de valeurs *à tout point* de la variété. Par contre, dans un voisinage de chaque point, on peut trouver n fonctions-coordonnées qui attribuent univoquement un système de valeurs (coordonnées) à chaque point de ce voisinage. De plus, si, sur une portion U de la variété, on possède (au moins) 2 façons de la paramétrer par des coordonnées x_i et x'_i alors les x'_i sont des fonctions homéomorphes (voire difféomorphes) des x_i. Hermann Weyl affirme que, pour une variété en général, il n'y a pas

175 [RZM 1918, 75-91]

176 [RZM 1918, 84]

177 La notion riemannienne de variété avait déjà une nature topologique ; cet aspect topologique apparaissant dans le réquisit de continuité des fonctions-paramètres (coordonnées). Ce réquisit de continuité n'avait pas encore chez Riemann la forme précise qu'il aura après le développement de la topologie ensembliste. Hermann Weyl garde la formulation de Riemann sans vouloir aller plus loin dans la façon d'analyser mathématiquement la notion de continuité. Il connait cependant bien les développements assez récents à son époque de la topologie ensembliste comme l'atteste son écrit de jeunesse [Weyl 1913] ainsi que [Weyl 1918], où il remet en question la façon ensembliste traditionnelle de rendre compte de la continuité. Cf. ce que nous avons dit dans le paragraphe II.1.f.

de système de coordonnées privilégié parmi tous ceux qui sont possibles. C'est pourquoi on a besoin d'une théorie de l'*invariance vis-à-vis d'une transformation continue quelconque*[178]. Cela contraste avec l'invariance à l'égard des seules transformations linéaires qui était apparue au premier chapitre d'*Espace-Temps-Matière* quand Weyl traitait de la géométrie affine.

Une fois comprise la notion de variété, le chemin que nous invite à suivre Hermann Weyl pour atteindre les espaces de Riemann, suit le développement historique du concept. Weyl nous propose de partir du cas particulier d'un espace de Riemann constitué par une surface plongée dans un espace 3-dimensionnel de nature euclidienne. Ce cas particulier est précisément celui qui avait été étudié par Carl Friedrich Gauss avant que Bernhard Riemann ne généralise la notion. Une surface est alors donnée de façon paramétrique par la donnée des coordonnées des points de cette surface *au sein de l'espace euclidien ambiant*. Ces coordonnées sont des fonctions continues $x^i(u^1, u^2)$ (pour i allant de 1 à 3) des coordonnées de Gauss u^1 et u^2. Le carré de la longueur d'un déplacement infinitésimal dx^i s'exprime comme :

$$ds^2=\sum_{i=1 \text{ à } 3}(dx^i)^2,$$

du fait que l'espace ambiant dans lequel la surface est plongée est euclidien.

En se servant du fait que les coordonnées x^i sont des fonctions de u^1 et u^2, la longueur d'un élément infinitésimal peut alors s'écrire comme :

$$ds^2=g_{ik}(u^1, u^2)\, du^i du^k$$

$$(\text{avec } g_{ik} = \frac{\partial x^1}{\partial u_i}\frac{\partial x^1}{\partial u_k} + \frac{\partial x^2}{\partial u_i}\frac{\partial x^2}{\partial u_k} + \frac{\partial x^3}{\partial u_i}\frac{\partial x^3}{\partial u_k}) \qquad (i,k=1,2)$$

Le mérite de Gauss, nous apprend Weyl, est d'avoir montré que la connaissance des fonctions g_{ik} (u^1, u^2) suffisait à caractériser toutes les propriétés géométriques intrinsèques à la surface (mesures de longueurs, d'angles, d'aires…) ; les «propriétés intrinsèques » étant toutes celles qui ne dépendent pas de la façon dont la surface est positionnée au sein de l'espace qui la contient[179]. En particulier on peut exprimer la *courbure de Gauss* de la surface

[178] [RZM 1919, 76]

[179] Plus précisément, on parle des relations métriques caractérisant la surface qui sont invariantes quand la surface est déplacée au sein de l'espace qui la contient, tout en conservant partout les relations métriques entre deux points infiniment proches de la surface. Autrement dit :

comme une expression du second ordre de ces coefficients g_{ik}. C'est un invariant vis-à-vis de toute transformation continue[180].

La surface étant d'une manière générale courbe, il n'existe pas de système de coordonnées privilégié qui permette de simplifier l'expression des fonctions g_{ik}. En particulier, on ne peut ramener g_{ik} (partout à la fois sur la surface) à la forme particulière δ_{ik} (i,k =1,2), qui s'écrit sous forme matricielle $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, comme pour la métrique de l'espace euclidien ambiant. Hermann Weyl interprète alors le passage de la géométrie euclidienne à la géométrie de Riemann, passage pour lequel Gauss a été une étape cruciale, comme consistant à lever une asymétrie épistémologiquement injustifiée[181]. Il s'agit de l'asymétrie qui existait entre, d'une part, l'ensemble des surfaces (ou des courbes) plongées dans l'espace et pouvant admettre une forme métrique intrinsèque quelconque, cette liberté de forme s'exprimant par la possibilité d'obtenir n'importe quel jeu de fonctions $g_{ij}(u, v)$[182] et, d'autre part, l'espace lui-même qui était muni *a priori* d'une structure rigide : celle de l'espace euclidien tridimensionnel usuel. Cette rigidité s'exprime par l'existence d'un système de coordonnées particulier (x^1, x^2, x^3) qu'on appelle « euclidien », tel que la métrique s'y exprime en tout point sous la forme canonique :

$$ds^2=(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Cette asymétrie disparait dans la géométrie de Riemann dans la mesure où *la métrique dont est pourvu l'espace dans son ensemble est aussi libre que les métriques dont sont pourvues les sous-espaces m-dimensionnel (m<n) qui y sont plongés*. Ainsi, Riemann nous a débarrassé d'une limitation *a priori* injustifiée[183].

> On considère comme ayant une géométrie similaire, deux surfaces obtenues l'une de l'autre par déformation [Verbiegung] sans distorsion [Verzerrung]

Notre traduction de [RZM 1919, 80]:

> So gilt allgemeinen auf zwei Flächen, die durch Verbiegung ohne Verzerrung auseinander hervorgehen, die gleiche Geometrie.

[180] C'est le contenu du célèbre « Theorema Eggregium » démontré par Gauss dans [Gauss 1827] et auquel renvoie Weyl [RZM 1919, 85-86].

[181] [RZM 1919, 82]

[182] Pourvu bien sûr que ces fonctions soient continues et que la matrice [$g_{\mu\nu}$] soit partout définie positive.

[183] Quand il proposera sa propre géométrie infinitésimale pure, Hermann Weyl adressera à Riemann un reproche similaire que celui que Riemann aurait pu adresser à Euclide: il y a encore dans la géométrie de Riemann une limitation injustifiée qui subsiste, comme une sorte d'impureté dans sa conception infinitésimale de l'espace, résidu de la géométrie d'Euclide. Cf. IV.2.c.

Gauss avait déjà avancé dans cette direction plus que ne le laisse penser Weyl en attribuant à Riemann, dans ce passage d'*Espace-Temps-Matière,* la libération à l'égard de cette asymétrie. Le caractère euclidien de l'espace ambiant dans lequel sont plongées les surfaces, même s'il est une hypothèse dominante des travaux de Gauss, avait bel et bien été remis en cause par cet auteur, dans certains de ses travaux. Hermann Weyl le sait bien puisqu'il renvoie lui-même à ces travaux. Ainsi, Riemann, par sa notion générale d'espace courbe *n*-dimensionnel, a donc institué une notion générale d'espace dont la possibilité était déjà requise pour donner sens à certains travaux de Gauss. Développons sous quelle forme se trouvait déjà cette idée chez Gauss.

Gauss avait employé ses outils de géométrie différentielle pour interpréter les données qu'il avait collectées à l'occasion de ses travaux de mesures géodésiques pour le compte du royaume de Hanovre[184]. Gauss rapporte des mesures de distances effectuées sur de grandes distances. Il commence par utiliser ces données pour mesurer la courbure de la surface terrestre. Les données qu'il utilise correspondent à des mesures de distances « intrinsèques » à la surface terrestre. Autrement dit, il s'agit de mesurer la longueur du trajet minimal reliant deux points *en restant sur la surface de la Terre*. Gauss arrive alors à mesurer la courbure de la surface terrestre et à mettre en évidence, grâce à des formules trigonométriques adaptées au cadre de la géométrie différentielle, que les relations métriques à la surface de la Terre sont, à l'acuité des mesures près et dans la portion limitée où ont été effectuées les mesures (dans le royaume de Hanovre), celles d'une surface sphérique.

Mais Hermann Weyl fait une allusion à un tout autre usage de ces mesures par Friedrich Gauss[185]. Il s'agit cette fois non plus de tester le caractère sphérique de la surface

184 On trouve par exemple une référence à ces mesures dans [Gauss 1827, 58].

En mai 1820, à l'invitation de Georges IV de Hanovre, Gauss se lance pour 5 ans dans un travail de mesures géodésiques en vue d'une cartographie de précision du royaume de Hanovre. Il se servira à cette occasion d'instruments de visée de son invention (cf. l'héliotrope) pour mesurer des distances entre des points culminants faciles à repérer comme des rochers, clochers ou châteaux.

Pour ces quelques détails, nous nous sommes référés ici à l'exposé du 31 mars 1994 à : Christian Radoux, *Journée de Mathématique et de Sciences organisée par la Faculté des Sciences de l'Université de Mons*, disponible sur : http://users.skynet.be/radoux/textes/gauss.pdf.

185 Dans [Gauss 1827, 58], Gauss rapporte qu'il a voulu utilisé ses données géodésiques pour tester certaines formules trigonométriques permettant de détecter un écart entre la forme de la Terre telle qu'elle est mesurée, et une sphère parfaite. La précision de ses mesures ne lui permettait de mettre en évidence aucun écart.

Les mesures utilisées sont les distances entre les trois villes Hohehagen, Brocken et Inselberg.

Dans [RZM 1919, 83], Hermann Weyl rapporte que Gauss aurait employé ses mesures géodésiques entre ces trois même villes, non pas pour tester la rotondité de la surface terrestre mais pour tester le caractère euclidien de l'espace. Cela semble suggérer que Gauss ait effectué deux types de mesures géodésiques entre ces trois villes.

de la Terre, mais le caractère euclidien *de l'espace lui-même*. Les mesures effectuées par Gauss l'amèneront à concéder que l'espace est bien euclidien, à la hauteur de l'acuité de ses instruments.

Pour bien comprendre la place que va occuper la connaissance physique dans l'élaboration des relations métriques sous-tendant la théorie de la relativité générale, il faut mettre en évidence une rupture essentielle au sein de la démarche de Gauss dans le passage de sa première à sa seconde utilisation des mesures géodésiques. Il faut comprendre que sa deuxième démarche est radicalement innovante en tant qu'elle fait de lui le premier, ou du moins un des premiers à son époque[186], à pratiquer ce qu'on peut appeler la *géométrie physique*, i.e. la mesure *physique* des déterminations métriques *de l'espace lui-même*. Cette idée d'une géométrie physique formera un cadre fondamental de la théorie d'Einstein.

Si on laisse de côté la question de l'origine vraisemblablement expérimentale de la géométrie euclidienne, origine dont les traces éloignées sont confuses, nous observons qu'un schéma classique se reproduit dans l'histoire jusqu'au XIX[ème] siècle quant aux rapports entre, d'une part, la géométrie mathématique et, d'autre part, la géométrie expérimentale au sens où la pratiquent les arpenteurs, topographes, géomètres-expert, etc. Selon ce schéma classique, la structure métrique de l'espace, qui détermine ensuite les relations métriques *possibles* des objets qui y sont plongés, est l'affaire du mathématicien. C'est une structure entièrement rationnelle et entièrement capturable par une axiomatique, par exemple celle d'Euclide. Par contre, quand un géomètre expérimental s'empare d'un instrument de mesure pour effectuer une mesure *physique*, il ne mesure pas l'espace lui-même mais des relations métriques appartenant aux objets concrets placés dans l'espace :

Un premier type de mesure qui correspondrait aux distances entre ces trois villes, *sans quitter la surface de la Terre*, et un second type de mesure qui suivrait des lignes droites de l'espace, c'est-à-dire 3 rayons lumineux joignant directement les 3 villes en « ligne droite » dans les airs.

Tout ceci est seulement suggéré puisqu'Hermann Weyl ne donne pas ici les références des travaux de Gauss sur lesquels il se base. Dans [Gauss 1827], Gauss ne parle pas explicitement d'un test du caractère euclidien de l'espace *entre ces trois mêmes villes*. Cependant, dans son dernier paragraphe, il donne une formule pour évaluer le rapport entre l'aire d'un triangle dans un espace courbe et l'aire d'un triangle dans un espace plat. A la suite de sa formule, il indique que, pour toutes les aires de triangles mesurables sur Terre, aucun écart n'est détectable par rapport à ce qui est attendu dans un espace euclidien. Peut-être Hermann Weyl fait il simplement référence à ce paragraphe.

[186] Restons prudent sur ce point. La primauté chronologique accordée ici à Gauss n'est pas significative et n'est pas le fruit d'une recherche historique poussée. La primauté chronologique n'a de toute manière aucune importance dans ce qui suit. Il ne s'agit sans doute pas d'une nouveauté radicale. Gauss renoue seulement avec un mode originel de penser la géométrie physique comme « mesure physique de l'espace lui même », mode qui devait au moins avoir été prépondérant lors de la lointaine naissance de la géométrie euclidienne, et qui a dû vraisemblablement réapparaître ponctuellement au cours de l'histoire. Nous laissons de côté cette grande question qui nous mènerait trop loin.

une maison, un champ, la longueur d'une règle. Selon ce schéma classique de partage du travail géométrique, l'espace des relations métriques *possibles* est une donnée préalable à la mesure physique, capturée par l'axiomatique mathématique. Si, contrairement au sens étymologique du terme, on interprète la notion de « géométrie » comme signifiant une « science métrique *de l'espace* », alors seul le *mathématicien*, opérant avec les axiomes d'Euclide, était véritablement géomètre. L'expert, l'arpenteur, ou simplement le physicien effectuant une mesure expérimentale de la longueur d'un objet matériel intervenant dans une de ses expériences, ne sont pas géomètres en ce sens. S'ils sont géomètres c'est, cette fois, au sens véritablement étymologique du terme, comme des mesureurs non de l'espace lui-même mais de la Terre ou des autres objets matériels. Ce partage classique des tâches était en particulier, nous semble-t-il, celui qui était assumé par Isaac Newton dans la construction de sa physique, quand il acceptait que l'espace réel fût un espace « mathématique ».

Avec le second type de travail géodésique qu'il effectue, tel que nous le rapporte Weyl, Gauss fait véritablement œuvre de *géomètre physique* dans un sens qui sort de ce partage classique des tâches. Ce qu'il mesure *expérimentalement*, ou du moins ce qu'il prétend mesurer[187], ce n'est plus la surface terrestre ou un quelconque objet matériel, mais

[187] Notre prudence ici tient à la difficulté de l'interprétation rigoureuse des mesures effectuées par Gauss. Une telle interprétation nous emmènerait trop loin ici. Nous nous devons cependant de signaler qu'il y a ici un problème devenu classique en épistémologie depuis sa remarquable explicitation par Henri Poincaré dans *les* chapitres 4 et 5 de *La Science et l'Hypothèse* [Poincaré 1902, 77-108]. C'est ce problème auquel fait allusion Weyl en [RZM 1919, 83] :

> Le point de vue selon lequel les observations empiriques ne pouvaient ni valider ni invalider la géométrie euclidienne a été défendu selon une perspective philosophique [Auf philosophischer Seite]

> Auf philosophischer Seite ist der Standpunkt vertreten worden, daß durch empirische Beobachtungen die Gültigkeit oder Ungültigkeit der Euklidischen Geometrie nicht erwiesen werden könne.

Le philosophe visé ici est probablement Poincaré. Selon cet auteur, la mesure de l'espace lui-même, par opposition à son contenu, est une ineptie. Toute mesure expérimentale ne peut prendre sens qu'à travers l'adoption de certaines lois physiques. On ne peut alors mesurer effectivement quelque chose comme un espace physique indépendant de tout contenu matériel. Nous testons toujours, de manière indissoluble, une certaine structure géométrique associée à certaines lois physiques décrivant la façon dont la matière (contenu de l'espace) est affectée par cette structure. Selon ce point de vue, on peut alors reprocher à Gauss de ne pas mesurer l'espace mais de simplement tester l'hypothèse physique de la propagation en ligne droite de la lumière (les mesures de Gauss étant de nature optique).

Hermann Weyl est d'accord avec ce raisonnement, comme il le confirme en [RZM 1919, 84], tant qu'on n'y voit qu'une forme de holisme géométrico-physique qui nous pousse à affirmer qu'on ne peut tester expérimentalement que le complexe géométrico-physique et non pas la géométrie seule. Pour aller plus loin dans la résolution de ce problème à l'intérieur de la pensée de Weyl, il faudrait différencier la sphère des relations locales (infiniment proches) et la sphère des relations finiment éloignées Cette distinction ne sera pleinement développée que dans notre partie IV. Pour Weyl, la sphère locale est entièrement déterminée par le sujet. Dans cette sphère, il n'y a pas plus chez Weyl que chez Poincaré de détermination *expérimentale* des propriétés de l'espace lui-même. Cette mesure consiste à mesurer des distances entre des points de l'espace éloignés mais directement visibles les uns à partir des autres, c'est-à-dire joignables par des rayons lumineux se propageant librement. Les distances sont alors mesurées à partir des angles que font entre eux les rayons lumineux que reçoit l'observateur en provenance directe de chaque point du triangle mesuré ; étant présupposé la propriété selon laquelle les rayons lumineux suivent les géodésiques de l'espace.

De telles tentatives de mesurer les propriétés métriques de l'espace par des mesures optiques étaient proposées à la même période dans le domaine de l'astronomie, notamment par Nicolaï Ivanovitch Lobatchevski[188]. Ces autres mesures consistaient essentiellement à admettre que l'espace était un espace à courbure constante et à supposer que les chemins parcourus par les rayons lumineux étaient les lignes droites (géodésiques) de cet espace. La mesure d'angles célestes[189] devait permettre d'évaluer un éventuel écart entre la somme des angles d'un triangle de l'espace et π radian ; cet écart étant fonction de la courbure à mesurer[190]. Dans ce dernier cas de figure, si la structure métrique de l'espace est partiellement déterminée par la mesure expérimentale, on est cependant obligé de poser *a priori* que l'espace est à courbure constante. La valeur de la courbure est alors le seul paramètre indéterminé, et la structure métrique de l'espace est parfaitement déterminée *a priori*, à ce facteur de courbure près. Il y a ainsi une infinité à 1 paramètre de géométries envisagées, mais chacune des géométries envisageables est entièrement capturable par une axiomatique du même type que celle d'Euclide. Tout comme les mesures terrestres de Gauss, les mesures effectuées par les astronomes du XIX[ème] montrèrent que l'espace était euclidien à la précision et à la portée près des instruments de l'époque.

---

l'espace, avec toute la différence cependant entre une forme de conventionnalisme et une détermination *a priori* par des exigences rationnelles.

Au sein de la sphère du finiment éloigné, en revanche, Weyl choisit, contrairement à Poincaré, de ne pas fixer conventionnellement, au sein du complexe géométrico-physique, l'espace géométrique, mais plutôt de fixer les lois de la propagation de la lumière et des corps en chutes libres selon les géodésiques de l'espace-temps. Ce choix est conforme à celui opéré par Albert Einstein. La géométrie à distance reste alors partiellement indéterminée par les notions mathématiques et les propriétés métriques de l'espace *à distance finie* deviennent mesurables chez Weyl comme elles l'étaient chez Gauss et Riemann.

188 Rapporté dans [RZM 1919, 83]

189 Notamment la parallaxe, mesure de la déviation de la coordonnée angulaire d'un astre au cours de l'année, suite à la révolution de la Terre autours du Soleil.

190 Dans [Gauss 1827, 40], Gauss affirme puis démontre que la somme des angles d'un triangle formé par trois géodésiques d'une surface courbe diffère de π radians par un écart qui est égal à l'intégrale de la mesure de courbure intrinsèque sur toute la surface du triangle.

Dans un espace à courbure constante, la courbure (de Gauss) peut donc être trouvée en divisant l'écart angulaire mesuré par la surface du triangle. Notons que l'écart est ici un angle orienté dont le signe est identique au signe de la courbure. On présente aujourd'hui ce résultat comme un corollaire d'un théorème plus général : le *théorème de Gauss-Bonnet*.

Les mesures géodésiques de Gauss du second type demandent cependant un saut conceptuel plus important que celui de ces mesures astronomiques. Gauss s'était en effet libéré de l'hypothèse de la courbure constante pour assumer pleinement le caractère *local* des mesures qu'il effectuait sur les propriétés métriques de l'espace. La variabilité des structures métriques envisageables pour l'espace devient alors infiniment plus riche. Mais surtout, puisque Gauss s'est débarrassé de l'hypothèse d'homogénéité sous-jacente à l'assomption de la courbure constante de l'espace, il n'y a plus de règle qui fixe *a priori* comment la connaissance d'une portion finie de l'espace conduit à une connaissance de la métrique sur l'espace complet. Il n'y a plus d'inférence possible des propriétés locales de l'espace à sa structure globale. La variabilité des propriétés métriques d'un point de l'espace à l'autre est libre. De ce fait, la structure métrique complète et effective de l'espace cesse d'être capturable par une axiomatique mathématique. Pour employer un vocabulaire similaire à celui d'Hermann Weyl, la métrique d'un espace de Riemann (dont les espaces envisagés par Gauss sont des cas particuliers) n'est pas entièrement « rationalisable ». L'« espace astronomique » de Bessel ou de Lobatchevski pouvait encore être fixé axiomatiquement et acquérir un statut mathématique après avoir été mesuré. L'espace, dans la conception sous-jacente aux mesures géodésiques de Gauss, n'est entièrement descriptible *que* par la mesure physique. On entre dans l'ère de la *géométrie physique*, au sens propre, de la science de la détermination empirique des propriétés métriques de l'espace.

Ainsi, les mesures effectuées par Gauss l'ont conduit à affirmer que notre espace était euclidien avec un fort degré de précision, mais cela n'ôte en rien l'originalité et le saut conceptuel important qu'il a franchi avec sa démarche d'ouvrir la mesure physique à l'espace lui-même et non plus aux seules sous-variétés qui y sont plongées. L'affirmation d'Hermann Weyl selon laquelle c'est dans le passage de Gauss à Riemann que l'on se libère de l'hypothèse injustifiée d'un espace ambiant euclidien doit alors être comprise comme suit.

D'une part, de par le résultat des travaux géodésiques de Gauss, c'est-à-dire la confirmation que l'espace est euclidien dans la limite de précision des mesures, ce dernier continuait évidemment à rédiger ses autres travaux sur les surfaces courbes en les plongeant dans l'espace euclidien tridimensionnel classique. Ainsi, la plupart des travaux de Gauss ne portent pas de trace de cette remise en question du caractère nécessairement euclidien de l'espace.

D'autre part, il faut reconnaître une évolution de Gauss à Riemann dans la façon dont sont développées les notions métriques intrinsèques des surfaces. Gauss part de surfaces plongées dans un espace ambiant euclidien. C'est-à-dire que la surface est caractérisée par la position $x^i(u, v)$ de chacun de ces points au sein cet espace ambiant. On qualifie donc cette définition des surfaces d'« extrinsèque ». Ce n'est que dans un second temps que Gauss accomplit un travail mathématique qui consiste à abstraire de cette définition extrinsèque des surfaces leurs propriétés intrinsèques. Cela se fait en montrant que certaines propriétés sont invariantes par déplacement (isométrique) de la surface au sein de l'espace ambiant. Gauss avait établi pour cela une méthode efficace. Il s'agit de montrer que certaines notions, d'abord exprimées en termes des $x^i(u, v)$, se laissent reconstruire uniquement en termes d'une fonctionnelle des $g_{ik}(u, v)$ qui donne des valeurs identiques pour deux tenseurs métriques images l'un de l'autre par une transformation continue[191] (ou, ce qui revient au même, pour un seul et même tenseur représenté dans deux système de coordonnées différents). La courbure de Gauss est un tel invariant différentiel de la forme quadratique différentielle[192]. Ainsi, le tenseur métrique est considéré comme la notion métrique intrinsèque fondamentale, i.e. celle à laquelle toutes les autres notions métriques intrinsèques devraient en principe pouvoir se ramener[193]. Cette méthode d'abstraction des propriétés métriques intrinsèques à partir de la description extrinsèque de la surface est précisément la méthode du *Theorema Eggregium* de Gauss que nous avons évoquée.

A l'opposé de Gauss, Riemann n'obtient pas les propriétés intrinsèques des surfaces par un mouvement d'abstraction à partir de leur définition extrinsèque. Il part directement d'une définition abstraite de la surface qui en fait un objet métrique indépendant, défini directement à partir de ses seules propriétés intrinsèques. C'est-à-dire qu'il se donne directement les fonctions $g_{\mu\nu}$ (u, v) sans les dériver d'une métrique euclidienne de l'espace ambiant.

De ce fait, Riemann assoit définitivement l'idée que la notion d'un espace courbe n'a pas besoin de la présupposition d'un plongement de cet espace dans un espace euclidien d'ordre supérieur. Enfin, à côté de cette évolution purement conceptuelle, il faut souligner avec Weyl la progression mathématique qui a permis à Riemann de donner sa définition générale des espaces de Riemann pour une dimension *n* quelconque. Cette libération à l'égard d'une dimension particulière demandait qu'on généralise les outils conceptuels de la géométrie des surfaces (2-dimensions) courbes de Gauss. La principale généralisation dont nous sommes redevable à Riemann consiste dans le passage de la notion de *mesure de courbure intrinsèque d'une surface*[194], nommée « courbure de Gauss », à la notion beaucoup

[191] [RZM 1918, 95-96]

[192] [RZM 1918, 95]

[193] Cf. [RZM 1921, 78]. Dans les pages qui suivent, Weyl illustre ce caractère « fondamental » du tenseur métrique en montrant comment les mesures de la longueur d'une courbe sur la surface, d'un angle entre deux courbes de la surface, ou de l'aire d'une portion de la surface se laissent construire comme des fonctions du tenseur métrique.

[194] On l'appelait déjà à l'époque de Weyl « courbure de Gauss » [Gaußsche Krümmung] Cf. [RZM 1921, 85]

plus difficile à appréhender du *tenseur de courbure* [Krümmung][195] d'un espace de dimension *n*, appelé aujourd'hui « tenseur de Riemann ».

b. L'insuffisance d'une analyse *a priori* pour déterminer la métrique : l'appel riemannien à la science physique

Après avoir expliqué brièvement la mise en place du cadre général des espaces courbes chez Gauss et Riemann, venons-en à l'argumentation épistémologique de Bernhard Riemann proprement dite, telle que se l'approprie Hermann Weyl. Rappelons qu'il s'agit de l'argumentation qui aboutit à affirmer la nécessité d'un appel à la physique pour déterminer les propriétés métriques de l'espace. L'argument peut être résumé comme suit.

Bernhard Riemann commence par analyser la notion d'un espace tridimensionnel pourvu d'une métrique. Tout comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent en suivant Hermann Weyl, Riemann commence par analyser les propriétés topologiques d'un tel espace et réfléchit à la signification de sa tridimensionnalité. Cette première analyse aboutit à la notion de variété 3-dimensionnelle (différentiable puisque Riemann insiste de manière essentielle sur la possibilité de différencier les fonctions coordonnées), telle que nous l'avons présentée plus haut.

Mais, tout comme dans la suite du raisonnement de Weyl présentée plus haut, Riemann remarque que l'espace n'est pas qu'une simple variété. C'est une variété sur laquelle est définie une métrique. Il reste à analyser la notion de métrique. Le résultat auquel veut parvenir Riemann consiste à dire que la notion générale d'un espace muni d'une métrique correspond à la donnée d'une forme quadratique différentielle $g_{mn}(x)$, c'est-à-dire qu'on aboutit finalement à la notion d'un *espace de Riemann*.

On trouve deux types de justification de ce résultat dans *Espace-Temps-Matière* et les textes apparentés.

Premièrement, l'adoption de la notion d'espace de Riemann comme notion la plus générale d'espace métrique est justifiée par le *cheminement historique de la géométrie* et en particulier par les développements de Gauss et Riemann que nous avons rapportés dans le paragraphe précédent. Selon ce premier point de vue, nous découvrons que la notion d'espace de Riemann est bien la notion la plus générale d'un espace métrique, en analysant

[195] [RZM 1919, 106]

dans un premier temps les propriétés métriques intrinsèques aux surfaces plongées dans l'espace euclidien usuel ; puis en effectuant le saut conceptuel que Weyl attribue à Riemann, c'est-à-dire en prenant conscience qu'il n'y a pas de raison *a priori* de refuser d'accorder à l'espace la même liberté quant à la détermination des coefficients de la forme quadratique que celle que nous accordons naturellement aux surfaces qui y sont plongées.

Deuxièmement, on trouve de façon plus éparse dans les textes de Weyl de l'époque une forme de justification plus anhistorique[196] qui tient à une analyse *a priori* des propriétés nécessaires que nous attendons d'une fonction définie sur une variété pour pouvoir la qualifier de « métrique ». Dans le paragraphe 11 d'*Espace-Temps-Matière,* Hermann Weyl est laconique. Il rappelle simplement que, chez Riemann, une métrique doit avoir comme propriété essentielle de permettre de comparer les longueurs de deux éléments linéaires infinitésimaux quelles que soient leurs positions et leurs directions respectives[197]. Puisqu'un espace est d'abord une variété donnée par l'intermédiaire de coordonnées, il faudra que cette métrique soit donnée par une formule faisant intervenir les coordonnées, mais qui donne cependant un résultat identique pour deux systèmes de coordonnées distincts. Autrement dit, la distance doit être un invariant par transformation continue[198] des coordonnées. Or la formule de la distance donnée par une forme quadratique différentiable :

$$ds=\sqrt{g_{ij}dx^i dx^j}$$

vérifie bien cette propriété d'invariance. Cela tient au caractère tensoriel du g_{ij}.

Hermann Weyl en reste là dans le paragraphe 11 d'*Espace-Temps-Matière*. Sa démonstration n'est cependant pas complète. La racine carrée d'une forme quadratique n'est pas le seul type de fonction susceptible d'admettre le type d'invariance demandée. Nous reviendrons sur ce problème dans le prochain paragraphe pour ne pas couper le fil de notre argumentation.

---

[196] Les deux points de vue ne s'excluent nullement mais s'articulent en fonction de ce que nous avons dit plus haut sur les rapports entre la spéculation rationnelle d'Hermann Weyl et son approche de l'histoire. Cf. I.2.bcd.

[197] [RZM 1919, 80-81]. Ces hypothèses correspondent à [Riemann 1884, B. §I, 286] :

> Massbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit der Grössen vom Ort, die in mehr als einer Weise stattfinden kann; die zunächst sich darbietende Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist wohl die, dass die Länge der Linien unabhängig von der Lage sei, also jede Linie durch jede messbar sei.

[198] Nous parlons comme Weyl en laissant de côté le problème de la différentiabilité des fonctions coordonnées. Il faudrait en fait préciser partout « transformation différentiable des coordonnées ».

Admettons donc que l'analyse *a priori* de ce qu'est en général un espace muni d'une métrique, aboutit à la notion générale des espaces courbes de Riemann. Comme le montre Hermann Weyl, cette notion englobe non seulement les géométries à courbure constante[199] mais aussi plus généralement la multiplicité infinie des espaces dont les coefficients métriques g_{ij} varient selon des fonctions continues arbitraires d'un point à un autre (pourvu que la forme reste définie positive). L'analyse de la notion d'un espace muni d'une métrique a ainsi conduit à une multiplicité illimitée de systèmes possibles de relations métriques. L'analyse *a priori* de la notion de métrique est alors impuissante pour sélectionner, au sein de cette multiplicité infinie, le jeu de relations métriques qui représentera les relations effectives qui sont instanciées dans le monde réel. C'est ici qu'intervient la célèbre conclusion de Riemann qui a fait dire à Weyl qu'il était le prophète de la théorie de la relativité générale, et qui a lancé le programme épistémologique de Riemann dont nous avons parlé :

> […] dans une variété discrète, le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette variété, tandis que, dans une variété continue, ce principe doit venir d'ailleurs. Il faut donc ou que la réalité sur laquelle est fondée l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui. […]
>
> Ceci nous conduit dans le domaine d'une autre science, dans le domaine de la Physique […][200].

c. Place de l'expérience dans la première étape du schéma riemannien : la détermination de la nature de la métrique

L'argumentation de Riemann que nous venons de résumer, à laquelle souscrivent Weyl et Einstein, l'un explicitement, l'autre par convergence d'opinions, aboutit à une nouvelle distribution des rôles respectifs de l'expérience et de la raison dans la détermination de la véritable métrique, i.e. de celle que l'on doit intégrer à la physique pour rendre compte des phénomènes[201].

---

[199] Pour obtenir la géométrie euclidienne, on ajoute la propriété qu'il existe un système de coordonnées où les coefficients de la métrique sont constants sur tout l'espace. Cf. [RZM 1918, 90]. Pour la géométrie sphérique [RZM 1918, 87]. Pour la géométrie hyperbolique [RZM 1918, 92].

[200] [Riemann 1854, 297]:

> […] bei einer discreten Mannigfaltigkeit das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in darauf wirkenden bindenen Kräften, gesucht werden.
>
> Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik[…]

[201] Remarquons bien que nous définissons ici la « vraie » métrique comme celle (éventuellement parmi plusieurs) qui doit être intégrée au corpus de la physique, et non pas déjà comme une propriété physique d'un

Pour comprendre ces nouveaux rôles, il nous faut maintenant faire une analyse épistémologique plus précise de la façon dont la physique s'immisce dans la géométrie (au sens fort d'une science de la mesure de l'espace lui-même) selon ce nouveau programme riemannien. La détermination de la notion de métrique s'effectue en deux phases radicalement distinctes, dont seule la première nous intéresse pour le moment.

Dans cette première phase, il ne s'agit pas de déterminer concrètement la métrique en fixant les valeurs numériques intervenant dans son expression fonctionnelle, mais simplement de fixer la forme mathématique générale que devra avoir la fonction représentant les relations métriques. Cette forme mathématique générale est ce qu'Hermann Weyl appelle la *« nature de l'espace »* [Natur des Raums] Nous utiliserons sa terminologie. Cette détermination de la nature de l'espace (ou *des natures*, au cas où il s'avérerait que plusieurs solutions soient également valables) est un problème important à résoudre dans l'approche riemannienne des fondements de la géométrie. C'est ce qu'Hermann Weyl appelle l'analyse mathématique du problème de l'espace, qui a donné son nom à ses conférences à Barcelone[202].

Ce problème n'admet pas de réponse complète chez Riemann. Riemann montre seulement dans *Sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie*, que la métrique doit appartenir à une famille générale de fonctions qui comprend aussi bien la racine carrée d'une forme quadratique, que la racine 4$^{\text{ème}}$ d'une forme du quatrième ordre etc.[203] Hermann Weyl renouvellera le problème général et lui donnera une solution nouvelle conforme à sa conception de la Nahegeometrie. Cependant, pour le moment, nous ne sommes pas intéressés par la spécificité de la solution de Weyl mais par le rôle que joue l'expérience en général dans la détermination de la nature de l'espace chez les auteurs de la tradition de la géométrie analytique.

Aussi bien chez Riemann que chez Weyl, la *nature* de la métrique, au contraire des valeurs numériques concrètes que va prendre cette métrique, est toujours entièrement mathématisable, capturable par une axiomatique. Cela est vrai non seulement des géométries rigides [Ferngeometrie] comme celles d'Euclide, mais aussi pour les espaces courbes du type « espace de Riemann » [Nahegeometrie]. De plus, la nature de la métrique *doit* être fixée préalablement à la mesure pour lui servir de cadre. On comprend alors que

espace physique réel. Nous laissons ainsi ouverte la question philosophique de l'existence d'un espace physique nous imposant une métrique unique comme une de ses propriétés essentielles. Bref, notre référence à une « vraie » métrique ne présuppose aucune forme de réalisme physique de l'espace.

[202] [Weyl 1923]

[203] Cf. notre annexe III.4.

les auteurs de cette tradition cherchent à fonder la nature de l'espace sur des arguments qui relèvent non pas de l'expérience mais d'une analyse *a priori* du concept de métrique et d'une tentative de généraliser au maximum le jeu possible des relations métriques afin d'empêcher que le travail physique qui va suivre cette détermination mathématique de la nature de l'espace :

> « ne soit entravé par des vues trop étroites, et que le progrès de la connaissance de la dépendance mutuelle des choses ne trouve un obstacle dans les préjugés traditionnels »[204].

Pour mieux comprendre de quoi il s'agit avec cette analyse *a priori* de la nature de l'espace, explicitons comment elle fonctionne dans l'analyse originelle de Bernhard Riemann.

Voici les principales hypothèses qui servent à Riemann à justifier la forme générale qu'il donne à sa fonction métrique :

1) Elle est définie sur l'espace considéré comme une variété à *n* dimensions dont les points peuvent être repérés par un système de coordonnées (x^i).[205]

2) « Les lignes considérées sur cet espace seront telles que les accroissements des variables dx^i varient continument sur ces lignes et ont des rapports qui varient également continument »[206]

3) « La longueur de l'élément linéaire, abstraction faite des quantités du second ordre, reste invariable, lorsque tous les points de cet élément subissent un même déplacement infiniment petit, ce qui implique en même temps que si toutes les quantités dx^i croissent dans un même rapport, l'élément linéaire varie également dans ce même rapport. […] L'élément linéaire pourra être une fonction homogène quelconque du premier degré des quantités dx^i qui restera invariable lorsqu'on changera le signe de toutes les quantités dx^i. »[207]

---

[204] [Riemann 1854, 297] :

> […] und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurtheile gehemmt wird.

[205] [Riemann 1854, 286] On notera V cette variété pour les notes techniques qui suivent.

[206] [Riemann 1854, 286]. Cette hypothèse revient, en termes plus modernes, à considérer uniquement les lignes qui ont un caractère C^1 sur notre variété, ce qui suppose que la variété soit différentiable.

[207] [Riemann 1854, 286-287] Cette hypothèse est plus difficile à appréhender. Riemann pose que la distance entre deux points $P_1(x^i)$ et $P_2(x^i+dx^i)$ est la même, à un terme du deuxième ordre près, que les points $P_3(x^i+\delta x^i)$ et $P_4(x^i+dx^i+\delta x^i)$. Ainsi, même si, dans un espace général tel que celui que décrit Riemann, les coordonnées n'ont pas à avoir une signification métrique globale, le comportement de la métrique à l'égard des déplacements

4) Pour chaque point P de la variété, on peut trouver une fonction continue[208] du lieu qui distingue entre elles chacune des sous-variétés à (n-1) dimensions formées de tous les points situés à une distance donnée du point P[209].

Ces hypothèses suffisent à Riemann pour montrer que la nature de la métrique est d'être la racine carrée d'une forme quadratique, ou bien la racine 4ème d'une forme d'ordre 4, etc.[210]

infinitésimaux dx^i, δx^i est toutefois contraint. Il s'agit d'une hypothèse de compatibilité de la structure métrique vis-à-vis de la structure de variété différentiable.

En prenant le cas particulier où δx^i et dx^i sont colinéaires, on trouve que la distance entre deux points $P(x^i)$ et $P''(x^i+\lambda dx^i)$ (λ réel), pour dx^i infiniment petit, vaut λ fois la distance entre les points $P(x^i)$ et $P'(x^i+dx^i)$, à un terme du deuxième ordre près.

Dans le contexte des espaces vectoriels normés, on appelle usuellement « homogénéité » la propriété : $\|\lambda * \vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$ qui est alors une propriété globale puisque, dans ce cas, nous disposons d'une notion de vecteur transportable sur tout l'espace. Par analogie, il conviendrait d'appeler « homogénéité locale » cette hypothèse riemannienne, pourvu qu'on ne confonde pas ce sens technique particulier du terme « homogénéité », avec les nombreux autres sens rencontrés dans notre travail en lien avec la pensée de Weyl.

208 Riemann devrait dire « continument différentiable » et même infiniment différentiable puisque, dans la suite de son raisonnement, il va considérer des développements limités de cette fonction à divers ordres.

209 Riemann ne traite pas explicitement cette dernière affirmation comme une hypothèse. Elle est pourtant indépendante des hypothèses qu'il assume explicitement et joue un rôle primordial dans sa dérivation de la nature de la métrique. Fixons un point P de l'espace et intéressons-nous aux surfaces constituées par tous les points qui sont à une distance fixée « d » de notre point P. On obtient ainsi une famille de sous-ensembles de V qu'on peut voir comme la famille de toutes les pseudo-sphères $S_P(d)$ (d variant sur tous les réels positifs) intrinsèques à notre espace, et centrées au point P.

L'affirmation de Riemann revient à demander que ces ensembles de points respectent la structure de variété différentiable de l'espace. Autrement dit, chacune de ces pseudo-sphères (au moins pour un rayon suffisamment petit) doit être une hyper-surface, i.e. une sous variété de dimension (n-1) obtenue comme ensemble des points pour lesquels une certaine fonction réelle (différentiable) du lieu $\phi_P(P')$ est constante. P désigne le point centre de la sphère qui a été fixé au début tandis que P' est la variable de notre fonction. Remarquons que nous ne pouvons pas prendre pour fonction ϕ_P la distance elle-même (c'est-à-dire $\phi_P(P') = d(P, P')$) En effet, cette hypothèse serait trop restrictive puisque la fonction « distance au point P » ne saurait être elle-même dérivable au point P. Tout ce que l'on sait, c'est que la valeur de ϕ_P doit être constante sur $S_P(d)$ tout comme l'est la fonction $P' \rightarrow d(P, P')$. On doit alors poser l'existence d'une certaine fonction réelle φ telle que finalement :

$$S_P(d) = \phi_P^{-1}(\varphi(d))$$

Pour résumer, on pose non pas directement que la fonction distance (à un point P fixé) est dérivable, mais seulement une certaine fonctionnelle φ de cette distance. La suite du raisonnement de Riemann conduira à considérer comme fonction « φ » la fonction carrée. Dans des termes mimant ceux de Weyl : ce n'est pas la distance elle-même mais le carré de la distance qui est une fonction rationnelle du lieu.

210 [Riemann 1854, 287] Cf. notre annexe III.4. plus bas.

Cette analyse riemannienne est la première ébauche de solution au problème de la détermination de la nature de la métrique. Nous voyons que les hypothèses qui participent à la détermination de cette nature n'ont pas un statut empirique. Ce sont des hypothèses mathématiques qui posent *a priori* la possibilité d'employer les outils analytiques pour la description de la structure métrique de l'espace. Ces hypothèses fonctionnent ainsi comme des conditions de possibilité pour l'application des outils conceptuels de l'analyse mathématique à la description des propriétés métriques de l'espace. C'est à ce moment de l'argumentation épistémologique que se joue la possibilité d'une lecture idéaliste de Riemann. Et c'est précisément un moment de l'argumentation de Riemann sur lequel Hermann Weyl reviendra constamment, faisant de la détermination de la nature de la métrique par des exigences rationnelles un but primordial : *l'analyse mathématique du problème de l'espace.*

d. Place de l'expérience dans la seconde étape du schéma riemannien : la détermination des coefficients de la métrique

Nous passons à la seconde phase du schéma riemannien de la détermination des propriétés métriques. Une fois la nature de la métrique déterminée, chez Riemann comme chez Weyl, nous ne nous trouvons pas face à un unique jeu de relations métriques possibles mais face à une multiplicité infinie de tels jeux, multiplicité dépendant des fonctions numériques concrètes choisies à l'intérieur du cadre constitué par la nature de l'espace. Ainsi, chez Riemann, une fois posé que les relations métriques sont données par le biais d'une forme quadratique différentielle variable $g_{mn}(x)$, définie sur une variété, encore reste-t-il à déterminer quelles sont les fonctions $g_{mn}(x)$ qui vont permettre la description géométrique de l'espace effectif qui intervient pour la description du monde physique. En effet, dans un espace de Riemann, les fonctions g_{mn} sont des fonctions arbitraires, à ceci près qu'elles doivent remplir les bonnes propriétés de continuité et de dérivabilité, et que la forme g_{mn} doit rester définie positive. De même, une fois qu'Einstein a accepté que la métrique ait la forme d'un pseudo-espace de Riemann, c'est-à-dire d'une variété 4-dimensionnelle munie d'une forme quadratique différentielle de signature + - - -, il lui reste encore à déterminer de manière exacte les fonctions $g_{mn}(x)$ qui correspondront à l'espace de la physique. Même dans la nouvelle théorie unifiée des champs proposée par Weyl, un tel schéma se reproduira[211].

[211] Une fois la nature de la métrique déterminée, i.e. une fois posé qu'elle se ramène à la donnée d'une classe d'équivalence de formes quadratiques $[g_{mn}]$ et d'une forme linéaire φ^i (connexion métrique), encore reste-t-il à préciser quelles sont précisément les fonctions g_{mn} et φ^i répondant au jeu effectif des relations métriques intervenant pour rendre compte de l'espace physique.

Cette seconde phase de détermination des propriétés métriques était, selon Riemann, du ressort de la science physique. Son analyse épistémologique s'arrêtait cependant là, sans qu'il ne précise véritablement ce qu'il entendait par la possibilité de déterminer les coefficients de la métrique par « le jeu des forces d'interaction de la matière ». Sans doute, le caractère elliptique de la pensée de Riemann à ce moment de l'argumentation a participé, avec la justesse de son analyse, à l'image de « prophète » de la théorie de la relativité générale que voulait lui donner Hermann Weyl.

La théorie de la relativité générale, comme le soutient Weyl, donne une consistance à ce que peut être cette détermination des coefficients de la métrique par les forces d'interaction de la matière réclamée par l'analyse épistémologique riemannienne. En effet, le cœur de la théorie d'Einstein est constitué par les équations de la gravitation, lois physiques affirmant que la courbure de l'espace(-temps), propriété géométrique qui participe à la détermination des coefficients métriques, est dépendante de la répartition de l'énergie-impulsion dans l'environnement physique considéré[212]. C'est donc précisément les lois de l'interaction gravitationnelle qui, dans la théorie d'Einstein, viennent sélectionner les fonctions métriques effectives, au sein du champ des fonctions possibles ouvert par la seule analyse de la nature de la métrique. Le chemin qu'a suivi Einstein pour établir sa théorie n'est certes pas parti de l'appel riemannien à une détermination physique des coefficients de la métrique. Einstein suivait plutôt la double voie de la recherche d'une théorie du champ gravitationnel compatible avec la vitesse finie de propagation des interactions, et de l'abolition de l'espace substantiel newtonien au profit d'un espace relationnel émergeant des interactions de la matière. Ce second motif du travail d'Einstein n'était pas né d'une analyse épistémologique des fondements de la géométrie, comme chez Riemann, mais de l'héritage d'une tradition de pensée de l'espace comme « espace relationnel » ; tradition qui était parvenue jusqu'à lui, comme il est bien connu, à travers sa lecture des œuvres de Ernst Mach. Ce dernier appelait à une explication des forces inertielles par un mouvement du corps subissant la force par rapport aux autres corps de l'univers plutôt que par rapport à un espace absolu. En identifiant inertie et gravitation, Einstein pouvait faire se correspondre cet appel de Mach à un espace relationnel expliquant l'inertie des corps, avec sa recherche d'une théorie du champ gravitationnel. Enfin, en identifiant les propriétés métriques de l'espace avec ses propriétés métriques, Einstein a fait se rejoindre cette demande d'un espace inertiel relationnel, avec la demande de Riemann d'une détermination des coefficients de la métrique par les forces d'interaction. C'est par cette heureuse concordance qu'Hermann Weyl a pu, dans *Espace-Temps-Matière*, passer sous silence la

---

[212] Plus précisément, les équations d'Einstein $R_{mn} + \frac{1}{2}Rg_{mn} = 8\pi GT_{mn}$ (dans un système d'unité où la vitesse de la lumière vaut 1 et en négligeant le terme cosmologique) posent l'égalité entre le tenseur d'Einstein, dérivé du tenseur de courbure de Ricci, et le tenseur d'énergie-impulsion de la matière, à un facteur multiplicatif près.

problématique de ce qu'Einstein appelait « principe de Mach » pour donner une interprétation de la théorie qui cadre avec le cadre épistémologique hérité de Riemann.

Le statut physique des lois d'Einstein qui corrèlent les propriétés métriques de l'espace-temps à la répartition de la matière-énergie font jouer à l'expérience un nouveau rôle dans cette seconde étape de détermination de la métrique, selon le schéma riemannien. D'une part, en tant qu'elles sont des lois physiques, les lois d'Einstein ne sont pas le fruit d'une simple analyse mathématique comme l'étaient les hypothèses de Riemann fondatrices de la géométrie analytique. Les lois d'Einstein ont un aspect empirique indéniable en tant qu'elles ont été construites pour correspondre aux lois newtoniennes (dont l'origine empirique est incontestable) dans la limite des champs faibles et des vitesses faibles. L'induction expérimentale a évidemment pris sa place dans l'élaboration des équations d'Einstein même si c'est à côté d'autres considérations mathématiques et philosophiques éloignées de tout rapport à l'expérience.

En tant que ces lois corrèlent les coefficients de la métrique à des grandeurs physiques (liées à la répartition de l'impulsion de la matière), elles font des coefficients de la métrique eux-mêmes des grandeurs physiques. C'est-à-dire que les valeurs particulières des coefficients de la métrique ne peuvent être fixées conceptuellement puisqu'elles dépendent de la répartition contingente de la matière dans l'environnement donné. Les coefficients de la métrique doivent donc être mesurés expérimentalement. Ce sont des éléments empiriques qui finissent de déterminer les propriétés de la métrique. Nous avions vu comment, dans la conception gaussienne de la géométrie physique, ce n'était pas les propriétés métriques *des corps* que l'on mesurait mais de l'espace lui-même. De même, une fois acceptées les lois d'Einstein, ce ne sont plus seulement les trajectoires particulières des corps soumis aux différentes forces d'interaction qui sont l'objet de mesure physique, mais c'est *l'espace des trajectoires possibles* qui est lui-même objet de mesure. Seule la mesure de la répartition de l'énergie-impulsion permet d'avoir connaissance de la courbure de l'espace et donc des fonctions mathématiques précises que sont les $g_{mn}(x)$ qui déterminent les relations métriques entre les points de l'espace-temps susceptibles d'appartenir à une trajectoire physique. Comme, de plus, la répartition de l'énergie-impulsion dans l'univers n'est pas (au moins localement) une constante mais une propriété physique dynamique, évoluant dans le temps, la métrique devient elle-même un *objet dynamique :*

> […] On fait un nouveau pas quand on admet que la métrique d'univers n'est pas donnée *a priori*, mais que la forme quadratique qui la représente dépend de la matière par des lois invariantes aussi. Ce n'est que lorsque ce pas est franchi qu'on s'est élevé à une théorie qui mérite vraiment le nom de théorie de la relativité générale. Elle permet alors de résoudre le problème de la relativité du mouvement. […] Et ce n'est que si nous admettons cette théorie que la gravitation apparaîtra comme une émanation du champ métrique, car nous savons par l'expérience que la gravitation est conditionnée par la répartition des

masses (loi d'attraction de Newton). C'est moins dans la condition d'invariance générale, que dans cette nouvelle étape, que nous paraît être le noyau de cette théorie de la relativité généralisée.[213]

e. Espace homogène et métrique hétérogène : l'impasse de la conception kleinienne de la géométrie

Nos analyses précédentes nous ont montré comment Hermann Weyl avait accepté le caractère physique et dynamique des coefficients de la métrique, suivant Einstein sur une voie qui avait été annoncée par Bernhard Riemann. Maintenant que ce point a été éclairci, et que nous avons introduit dans notre deuxième partie l'appareil conceptuel concernant l'espace comme forme homogène, nous disposons d'un cadre suffisant pour exprimer à nouveau notre problématique initiale : celle d'une tension interne au travail de Weyl entre d'une part une exigence d'homogénéité liée à sa conception de l'espace comme « forme des apparences » et le caractère hétérogène des relations métriques qui découle de ce caractère dynamique de la métrique.

Pour réexposer dans toute sa précision ce problème, clef pour la compréhension de l'unité d'*Espace-Temps-Matière*, nous allons commenter un texte du paragraphe 12 « aspect dynamique des propriétés métriques », issu de la 4ème édition de l'ouvrage. C'est un texte plusieurs fois remanié à l'occasion des diverses éditions de l'ouvrage. Il ne comporte pas le dernier mot de la position de Weyl concernant la façon de se sortir de cette difficulté. D'une certaine façon, ce texte passe même à côté de certains aspects de la question étudiée, par un abus de simplifications didactiques. Mais il reste un texte intéressant pour présenter la position de Weyl parce qu'il se situe à un moment charnière de son livre, au moment où il n'a pas encore exposé les principes de la théorie de la relativité générale, mais où la problématique qui nous concerne se pose déjà, comme un problème accompagnant toute épistémologie qui part de la position riemannienne.

Notre extrait débute par l'exposition du problème :

> L'espace est une forme des phénomènes et, en tant que tel, il est nécessairement homogène. A partir de là, il pourrait sembler qu'à partir de la riche abondance des géométries possibles incluses dans la conception de Riemann, on ne doive conserver en fin de compte que les trois géométries évoquées

---

[213] Notre traduction de [RZM 1919, 192-193] :

> Ein neues physikalisches Moment kommt erst durch die Annahme hinein, die Weltmetrik sei nicht *a priori* fest gegeben, sondern jene quadratische Grundform werde durch die Materie nach allgemein invarianten Gesetzen bestimmt. Erst dadurch erheben wir uns zu einer Theorie, die den Namen einer allgemeinen Relativitätstheorie wirklich verdient und nicht nur das mathematische Gewand einer solchen erborgt hat. Erst sie ermöglicht es, das Problem der Relativität der Bewegung zu lösen.

> [celles à courbure constante]. Riemann avait une opinion différente comme il est évident à partir des remarques de conclusion de son essai[214].[215]

La deuxième partie de notre travail a assez développé la fonction épistémique de cette homogénéité, autrement dit ce en quoi consiste cette « nécessité » dont parle Weyl. Pourquoi est-ce que, selon Weyl, cette homogénéité nécessaire, si elle est mal conçue, risque d'imposer une restriction drastique et indue au sein du riche univers des espaces de Riemann ?

Le problème est déjà connu avant sa formulation par Hermann Weyl. Il naît au fond de la rencontre de deux grandes pensées géométriques du dix-neuvième siècle, toutes deux en lien étroit avec l'école de Göttingen. Il s'agit d'un côté la tradition de la géométrie analytique des espaces courbes telle qu'on la trouve par exemple chez Gauss et Riemann et, de l'autre côté, l'héritage de Klein et du programme d'Erlangen, à la source de la compréhension de l'espace par le biais de l'étude algébrique du groupe des transformations de l'espace qui laisse ses structures invariantes. C'est non seulement la notion du groupe des transformations, mais également l'idée d'homogénéité qui ont présidé à une pensée unificatrice de la géométrie dans cette tradition du programme d'Erlangen. Dans cette perspective, une géométrie (au sens large, transversal, qui comprend aussi bien les géométries « métriques », que celles affines, conformes ou projectives) n'est rien d'autre que l'étude du groupe des transformations d'un espace qui est homogène, au sens où il doit y avoir une transformation de l'espace entier dans lui-même (« transformation globale ») qui envoie n'importe quel point vers n'importe quel autre. Dans un langage un peu plus moderne, une géométrie de Klein est la donnée (E, G) d'un espace E et du groupe G$\subset E^E$ des transformations qui laissent globalement invariantes les structures de cet espace de telle sorte que :

1) Le groupe G agit (au sens mathématique de l'action de groupe) sur l'espace E
2) *Homogénéité* : L'action de G sur E est transitive.

Si on se restreint au cas métrique, celui qui nous concerne avec les espaces de Riemann, alors une géométrie métrique de Klein est un espace sur lequel le groupe des

---

[214] Il s'agit de [Riemann 1854].

[215] Notre traduction de [RZM 1921, 87] :

> Der Raum ist Form der Erscheinungen und, sofern er das ist, notwendig homogen. Damit scheint es, als ob aus der ganzen Fülle der möglichen Geometrien, welche der Riemannsche Begriff umfaßt, von vornherein nur die erwähnten drei speziellen Fälle in Betracht kämen und alle übrigen als bedeutungslos unbesehen fallen gelassen werden müßten: parturiunt montes, nascetur ridiculus mus! Riemann dachte darüber anders, die Schlußworte seines Vortrags geben darüber Auskunft.

isométries agit transitivement. Ainsi, toute configuration géométrique qui peut être développée à partir d'un certain point qui sert d'origine, peut tout aussi bien l'être à partir de n'importe quel autre point. Exprimé d'une manière plus physique ou cinématique, en employant la notion de mouvement, on peut dire que, dans une telle géométrie, un objet étendu peut se déplacer de n'importe quel point à n'importe quel autre sans pour autant changer sa nature géométrique, i.e. sans que les relations métriques internes aux éléments de cet objet ne changent. On peut parler d'un objet « rigide ».

Mais cette homogénéité globale de l'espace est précisément le type de symétrie que ne possèdent pas en général les espaces courbes de Riemann. La variabilité de la courbure d'un point à un autre d'un espace de Riemann empêche généralement la possibilité d'une telle isométrie globale, ou autrement dit empêche la possibilité du mouvement d'un objet rigide. On montre que, parmi les espaces de Riemann, seuls ceux qui ont une courbure constante sont homogènes au sens de Klein. Suivant si la courbure est nulle, positive ou négative, on retrouve les trois seuls cas qu'évoque Weyl et qui correspondent respectivement à la géométrie euclidienne, à la géométrie elliptique et à la géométrie hyperbolique.

La solution draconienne qui consisterait à accepter cette réduction du vaste univers des espaces de Riemann aux seules trois géométries à courbure constante est sérieuse. Elle avait été adoptée par d'autres grands penseurs de la géométrie comme Henri Poincaré. Sans être parfaitement clair ni catégorique à ce sujet, Poincaré, dans *La Science et l'Hypothèse,* semblait mettait à l'écart l'usage des géométries courbes de Riemann pour rendre compte de la structure de l'espace, précisément au nom de l'exigence d'homogénéité, ou plus précisément de la possibilité du mouvement d'un corps rigide :

> [D'après un théorème de Sophus Lie], si on admet la possibilité du mouvement, on ne pourra inventer qu'un nombre fini et même assez restreint de géométries à trois dimensions. […] Cependant, ce résultat semble contredit par Riemann, car ce savant construit une infinité de géométries différentes. […] Mais la plupart de ces définitions [celles des espaces courbes de Riemann] sont incompatible avec le mouvement d'une figure invariable […] Ces géométries de Riemann, si intéressantes à divers titres, ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide.[216]

Cette attitude poincaréenne n'est pas isolée. C'est en effet une posture naturelle pour tous ceux qui pensait la nature de la géométrie à partir de cette exigence d'homogénéité pensée à la façon de Klein. C'était déjà par exemple le cas de Helmholtz qui, à l'occasion de son travail sur le problème de Riemann-Helmholtz, avait proposé également une solution qui aboutissait à ne voir les nouvelles géométries analytiques que comme de

[216] [Poincaré 1902, 73]

simples systèmes logico-mathématiques sans application à la mesure physique, tentant de trouver des critères asseyant définitivement l'usage millénaire de la géométrie euclidienne.

La stratégie d'Hermann Weyl est complètement différente de celle de ces auteurs. Il ne fait, selon lui, que suivre et développer la position de Bernhard Riemann. Il s'agit de maintenir la nécessité de l'homogénéité comme propriété essentielle de l'espace, mais en déplaçant le sens qu'elle revêt. Cela va lui permettre de légitimer les géométries de Riemann comme d'authentiques géométries, c'est-à-dire comme des cadres conceptuels susceptibles de refléter la structure même de l'espace. Il va même montrer qu'elles sont en un sens les seules pouvant s'appliquer au réel physique.

Continuons un peu plus avant le texte pour comprendre comment Weyl va déplacer le sens de l'homogénéité de l'espace.

> Bien que le véritable état de fait soit vraiment plus complexe, nous partirons du plus simple des systèmes de géométrie optique, dont la loi fondamentale stipule que le rayon de lumière, provenant d'un point M émettant de la lumière à un observateur situé en P, est une ligne « géodésique » ; la plus courte des lignes connectant ces deux points. Nous ne tenons pas compte de la finitude de la vitesse de propagation de la lumière. Nous n'attribuons à la conscience qui reçoit qu'une simple faculté de perception et la simplifions en un « œil-ponctuel » qui observe immédiatement les différences de direction des rayons incidents, ces directions étant les valeurs de θ données par:
>
> $$\cos(\theta) = \frac{Q(d\delta)}{\sqrt{Q(dd) * Q(\delta\delta)}}$$
>
> L' « œil ponctuel » obtient ainsi une *image des directions* dans lesquelles se trouvent les objets environnants (On ignore le facteur « couleur »). La loi de la continuité gouverne non seulement l'action des choses physiques mais aussi les interactions psycho-physiques. La direction dans laquelle nous observons des objets n'est pas déterminée par leurs seules positions mais aussi par la direction du rayon lumineux qui en émerge et vient frapper la rétine, et, par là, par l'état du champ optique[217] directement en contact avec le corps de cette énigmatique réalité dont l'essence est d'avoir un monde objectif qui se présente à elle sous la forme d'expériences de conscience. Dire qu'un contenu matériel G est le même que le contenu matériel G' ne peut alors rien vouloir dire d'autre que le fait qu'à chaque point P respectivement à G correspond un point de vue P' relativement à G' (et vice et versa) de telle sorte qu'un observateur en P' dans G' reçoit la même « image directionnelle » qu'un observateur dans G reçoit en P.[218]

[217] Hermann Weyl veut dire que, outre les positions respectives de l'objet observé et de l'observateur, il faut tenir compte de la configuration des trajectoires des rayons lumineux qui les relient. La configuration des directions des rayons lumineux au point où l'observateur les reçoit semble être ce qu'Hermann Weyl appelle l'état du champ optique.

[218] Notre traduction de [RZM 1921, 819] :

Ce texte développe le sens que va devoir prendre l'homogénéité de l'espace, compte tenu de l'analyse par Hermann Weyl de la notion de sujet. On comprend ici en quoi la figure du sujet-coordonnées qui avait été introduite dans la partie mathématique de l'analyse de la notion d'espace préfigurait une notion physique de sujet, celle de l'observateur situé en un point du monde et le décrivant depuis ce point de vue singulier.

Nous avions remarqué que, dans la sphère mathématique, le sujet-coordonnées avait une nature similaire aux objets géométriques contenus dans l'espace, ce qui nous avait permis de passer indifféremment d'une interprétation objectuelle à une interprétation subjectuelle des transformations spatiales. Ici aussi, le sujet-référentiel participe lui même à la réalité physique qu'il observe, par l'intermédiaire de son corps, idéalisé sous la forme d'un œil ponctuel percevant la réalité spatiale à travers les données optiques qu'il reçoit au point où il est situé. Si, au niveau mathématique, le système de coordonnées était arbitraire, c'était parce qu'au niveau physique, cela va permettre de neutraliser la singularité d'un point de vue ponctuel de l'observateur sur le monde. L'homogénéité de l'espace, postulée à un niveau mathématique, est un premier pas vers un *principe de relativité des mesures physiques* qui pose la possibilité de passer du point de vue singulier d'un observateur localisé, à un quelconque autre point de vue similaire, dans la description physique du monde.

Comment fonctionne ce principe de relativité de la mesure ? Les objets physiques, en tant qu'ils sont situés dans l'espace, possèdent par là même une nature géométrique. On sait que l'homogénéité de l'espace nous permet de construire un discours objectif sur la réalité géométrique, en s'abstrayant de la singularité de chaque sujet-coordonnées. De même, pour savoir comment les valeurs numériques exprimant une certaine grandeur

---

Wir legen weiter, obschon sich die Dinge in Wirklichkeit komplizierten verhalten, eine möglichst einfache geometrische Optik zugrunde, deren Grundgesetz besagt: der Lichtstrahl von einem Licht aussendenden Punkt M zu einem Beobachter in P ist eine „geodätische" Linie, die unter allen Verbindungslinien von M mit P die geringste Länge besitzt; von der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes sehen wir ganz ab. Dem auffassenden Bewusstsein schreiben wir lediglich ein optisches Wahrnehmungsvermögen zu und vereinfachen es uns zu einem „Punktauge", das die Richtungsunterschiede der auftreffenden Lichtstrahlen, welche durch die aus (15) zu bestimmenden Winkel θ gegeben werden, unmittelbar wahrnimmt und dadurch ein *Richtungsbild* der umgebenden Gegenstände gewinnt (wir ignorieren die Qualitäten des Farbe). Nicht nur die Wirkung der physischen Dinge aufeinander, sondern auch die psychophysische Wechselwirkung wird von dem Gesetz der Kontinuität beherrscht: die Richtung, in der wir Gegenstände wahrnehmen, ist nicht durch deren Ort bestimmt, sondern durch dir Richtung des von ihnen auf der Netzhaut auftreffenden Lichtstrahles; also durch den Zustand des optischen Feldes in der unmittelbaren Berührung mit dem Leibe jenes rätselhaften Realen, in dessen Wesen es liegt, dass ihm eine gegenständliche Welt in Bewusstseinserlebnissen „erscheint". Dass aber ein materialer Gehalt $\boldsymbol{G}$ derselbe ist wie der materiale Gehalt $\boldsymbol{G}'$, kann offenbar nichts anderes heißen, als dass zu jedem Standpunkt P gegenüber $\boldsymbol{G}$ ein Standpunkt P' gegenüber $\boldsymbol{G}'$ gehört (und umgekehrt) derart, dass ein Beobachter in P' von $\boldsymbol{G}'$ das gleiche Richtungsbild empfängt, wie es ein Beobachter in P von $\boldsymbol{G}$ erhält.

physique vont être modifiées dans le passage d'un certain référentiel à l'autre, il suffit de savoir de quelle nature géométrique particulière (vecteur, tenseur, densité tensorielle, etc.) participe cette grandeur physique. Ainsi, la singularité du point de vue de l'observateur en physique est éliminable par un mouvement d'abstraction, pourvu qu'on explicite la position (cinématique) de l'observateur et qu'on détermine la nature géométrique des différentes grandeurs. Telle est le sens de ce principe de relativité de la mesure.

Que signifie alors l'homogénéité de l'espace dans ce contexte physique ? Dans la sphère mathématique, l'homogénéité signifiait qu'un seul et même objet géométrique pouvait être déplacé en un point quelconque de l'espace mathématique sans que sa nature géométrique en soit modifiée. De même ici, un objet physique (une portion de matière), en tant qu'il a une nature spatiale, doit pouvoir être déplacé en un point quelconque de l'espace sans que sa nature en soit modifiée. Dans l'image simplificatrice que donne Weyl dans le texte ci-dessus, cette invariance de la nature de l'objet est réductible à la possibilité d'en obtenir une image optique équivalente après le déplacement, pourvu que l'observateur soit positionné vis-à-vis de l'objet déplacé comme le premier observateur l'était vis-à-vis de l'objet avant déplacement.

L'homogénéité comprise en ce sens est-elle bien vérifiée dans une géométrie qui accepte le point de départ de la géométrie Riemannienne ? En suivant comment Hermann Weyl démontre que la réponse à cette question est positive, nous allons révéler des aspects essentiels de sa position épistémologique.

f. De l'argument du trou à l'argument de la boule d'argile : Hermann Weyl réinterprète la célèbre problématique d'Einstein

Dans la suite du texte, Hermann Weyl va montrer que l'homogénéité de l'espace, comprise comme possibilité de retrouver la même image visuelle d'un corps après son déplacement, est bien vérifiée dans toute géométrie qui accepte les deux présupposés riemanniens suivants :

1) La métrique est donnée par une forme quadratique différentielle :

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j,$$

c'est-à-dire que nous sommes dans un « espace de Riemann ».

2) Les coefficients de la métrique sont déterminés par le contenu physique de l'espace.

L'hypothèse 2) est la façon dont Hermann Weyl interprète la proposition un peu énigmatique de Riemann selon laquelle « le fondement des rapports métriques [de l'espace] doit être cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui. » L'interprétation d'Hermann Weyl conduit donc à identifier cette exigence riemannienne avec celle d'Ernst Mach, relayée par Einstein, selon laquelle l'inertie des corps doit pouvoir être parfaitement déterminée par les masses présentes dans l'univers. L'identification est possible pourvu qu'on remarque que l'inertie est une propriété géométrique dépendant de la métrique, dans la mesure où un mouvement inertiel est un mouvement uniforme le long d'une ligne droite (une géodésique déterminée par la métrique). On se retrouve donc avec un « principe de Riemann-Mach » affirmant qu'il doit exister une loi en vertu de laquelle les coefficients de la métrique se trouvent déterminés par la matière, déterminant à leur tour les mouvements inertiels. Hermann Weyl ne fait aucune référence à Mach. Nous verrons cependant que l'analogie fonctionne, l'hypothèse riemannienne jouant dans l'argumentation de Weyl qui va suivre la même fonction que celle de Mach pour l'argumentation d'Einstein.

La démonstration d'Hermann Weyl suit un chemin extrêmement proche de celui qu'avait développé Einstein à l'occasion de son fameux « argument du trou », sans lui être parfaitement identique. Nous allons rappeler à grands traits le fil de l'argumentation d'Einstein pour servir de point de comparaison par rapport à l'approche d'Hermann Weyl. Nous ne proposons pas ici une approche nouvelle mais suivons les historiens des sciences dont nous donnons les références en note. Nous renvoyons à la littérature abondante à ce sujet pour une présentation plus précise.

Aux alentours de l'année 1913, alors qu'il cherchait ses équations de la gravitation, Einstein avait déjà posé quelques hypothèses générales qui dirigeaient ces recherches. D'une part, il posait l'équivalence entre inertie et gravitation, illustrée par sa fameuse expérience de pensée de l'ascenseur. D'autre part, inspiré par les idées de Ernst Mach, il posait que l'inertie des corps devait être complètement déterminée par l'ensemble de la distribution de la matière dans l'univers, et non pas par la référence à un quelconque « espace absolu » à la façon de Newton. La gravitation ayant toujours été pensée comme étant déterminée par la matière, la première hypothèse venait renforcer et rendre fortement plausible la seconde. L'inertie des corps étant, d'autre part, une tendance des corps à suivre les lignes droites de l'espace, sa dépendance à l'égard de la répartition de la matière dans l'univers était interprétée comme une dépendance des *propriétés métriques* de l'espace à l'égard de la matière qui y est contenue. Enfin, Albert Einstein voulait que sa nouvelle théorie de la gravitation respecte son principe de relativité générale qui pose *a priori* l'équivalence de tout référentiel pour exprimer les lois de la physique ; ce principe devait, selon lui, s'exprimer mathématiquement par le principe de covariance, imposant que les équations soient invariantes par un changement quelconque des coordonnées spatio-temporelles[219].

Dans ce contexte, Albert Einstein cherchait à déterminer les équations de la gravitation devant exprimer comment s'effectue cette détermination des propriétés métriques par la matière. Tout comme Hermann Weyl, Einstein se plaçait sous l'hypothèse générale selon laquelle ces propriétés métriques s'exprimaient sous la forme d'une forme quadratique différentielle $g_{\mu\nu}$ dépendant de la position (espace de Riemann). On savait déjà que l'objet géométrique naturel pour exprimer la répartition de la matière était le tenseur énergie-impulsion souvent noté « $T_{\mu\nu}$ ». Albert Einstein se demande alors si les équations de la gravitation pouvaient s'écrire, comme on s'y attendrait au vu des hypothèses exposées ci-dessus, sous la forme « $G_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}$ », où $G_{\mu\nu}$ serait un tenseur, fonction de la métrique spatio-temporelle $g_{\mu\nu}$, qui resterait à déterminer.

Dans les premiers mois de sa réflexion, Albert Einstein pense qu'une telle équation ne pourrait satisfaire au réquisit de la détermination complète de la forme métrique de l'espace par la matière. Cette impossibilité supposée est illustrée par un argument didactique qu'on appelle « argument du trou » qui apparait pour la première fois dans [Einstein&Grossman, 1913]. C'est un argument par l'absurde. Supposons que notre équation convienne. Pour simplifier le problème, supposons que l'univers soit statique ; que la répartition de la matière n'évolue pas. C'est une simplification indifférente pour la validité de l'argument qui va suivre. Supposons à présent que, dans cet univers, il y ait une portion de l'espace sans aucune matière, un « trou ». Cette hypothèse supplémentaire s'exprimera par le fait que le tenseur énergie-impulsion (et donc le tenseur $G_{\mu\nu}$ encore indéterminé) s'annulera identiquement sur toute cette portion d'espace(-temps).

Supposons que, dans un premier système de coordonnées (x), on ait une certaine métrique $g_{\mu\nu}(x)$ qui soit solution de notre équation, i.e. qui vérifie « $G_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}$ ». Considérons alors un changement de coordonnées qui ait la propriété de se réduire à l'identité en dehors de notre « trou » mais non pas à l'intérieur du trou. Dans ce second système de coordonnées (x'), les tenseurs G et T s'exprimerons par des fonctions identiques $G_{\mu\nu}'(x')= G_{\mu\nu}(x)$ et $T_{\mu\nu}'(x')= T_{\mu\nu}(x)$. En effet, à l'extérieur du trou, on a x'=x ; tandis qu'à l'intérieur du trou, ces tenseurs s'annulent donc restent nuls dans tout système de coordonnées. Le tenseur métrique g s'exprimera lui aussi par des fonctions identiques $g_{\mu\nu}'(x')= g_{\mu\nu}(x)$ à l'extérieur du trou, pour la même raison que les deux premiers tenseurs. Par contre, à l'intérieur du trou, les coefficients de la métrique vont s'exprimer par de nouvelles fonctions $g'_{\mu\nu}(x')\neq g_{\mu\nu}(x)$

[219] Pourvu seulement que les fonctions de changement de coordonnées soient inversibles, continues et suffisamment différentiables.

puisque, contrairement aux deux premiers tenseurs, la métrique g, supposée non dégénérée, ne s'annule jamais et change de façon covariante comme il est bien connu en fonction du changement de coordonnées.

Le point crucial de l'argument d'Einstein, selon l'historien John Norton, intervient maintenant. Il s'agit de passer d'une interprétation passive de la transformation $x \rightarrow x'$ à une interprétation active. C'est une distinction technique qui signifie qu'on ne va plus considérer la transformation $x \rightarrow x'$ comme un changement de coordonnées, mais comme une manière de déplacer les tenseurs g, G et T sur la variété spatio-temporelle. On reste dans le premier système de coordonnées et on donne comme valeurs aux fonctions $g_{\mu\nu}$, $G_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ au point de coordonnées « x^{μ} », les valeurs $g_{\mu\nu}(x')$, $G_{\mu\nu}(x')$ et $T_{\mu\nu}(x')$ qui avaient été calculées dans un premier temps pour le second système de coordonnées, là où le point avait pour coordonnées « x'^{μ} ». On se retrouve donc, dans un seul et même système de coordonnées, avec deux jeux de valeurs possibles ($g_{\mu\nu}(x)$, $G_{\mu\nu}(x)$, et $T_{\mu\nu}(x)$) et ($g'_{\mu\nu}(x)$, $G'_{\mu\nu}(x)$, et $T'_{\mu\nu}(x)$) qui sont toutes les deux solutions de l'équation, pourvu qu'on accepte le principe de covariance. Maintenant, nous avons vu que $G_{\mu\nu} = G'_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu} = T'_{\mu\nu}$ mais $g_{\mu\nu} \neq g'_{\mu\nu}$. On se retrouve donc avec deux valeurs différentes de la métrique ($g_{\mu\nu} \neq g'_{\mu\nu}$) pour une seule et même répartition de la masse-énergie ($T_{\mu\nu}=T'_{\mu\nu}$), ce qui semble contredire l'hypothèse de détermination complète de la métrique par les masses dans l'Univers.

Einstein avait cru, dans les premiers mois qui ont suivi l'émergence de l'argument du trou, qu'il fallait alors se résoudre à abandonner le principe de covariance, et donc en particulier la forme tensorielle de l'équation, pour sauver le principe d'équivalence et l'hypothèse de Riemann-Mach. Il se lança alors dans une recherche d'équations plus complexes, non covariantes. On sait depuis les travaux de John Norton que la théorie de la relativité générale fut achevée rapidement sous la forme covariante qu'on lui connait, sitôt qu'Einstein eut découvert une faille dans son argument du trou. L'argument du trou montre qu'il n'y a pas une seule solution, dans un système de coordonnées donné, pour les *coefficients* de la métrique. Mais cela ne montre pas qu'il y ait deux formes métriques différentes compatibles avec une seule et même répartition de l'énergie-impulsion. En effet, les deux jeux de coefficients $g_{\mu\nu}(x)$ et $g'_{\mu\nu}(x)$, par leur construction, munissent la variété spatio-temporelle de deux notions de distance qui sont isométriques (la transformation active $x \rightarrow x'$ fournissant bien entendue l'isométrie) La gêne qu'éprouvait Einstein était liée au fait que, malgré l'isométrie, ces deux distances sont tout de même différentes dans la mesure où *pour un seul et même point de la variété spatio-temporelle* (identifié par ses coordonnées dans le système de coordonnées fixé), les deux distances en question fournissent des valeurs différentes. Il s'agissait en fait d'un faux problème dans la mesure où Albert Einstein avait considéré à tort que la donnée fixe d'un système de coordonnées suffit à donner une identité physique aux points de la variété spatio-temporelle. En fait, tant qu'elle n'est pas couplée à la donnée d'un contenu physique, la fixation d'un système de coordonnées n'est qu'un artefact mathématique sans réalité physique. A l'extérieur du trou, l'identité physique des points de notre variété spatio-temporelle peut être matérialisée par la masse ponctuelle qui l'occupe. A l'intérieur du trou, quel contenu physique peut bien servir à identifier les points de la variété ? Certainement pas la masse qui en est absente. Il n'y a donc que le champ métrique lui-même (!) Si bien qu'il ne faut pas dire que les valeurs $g_{\mu\nu}(x)$ et $g_{\mu\nu}'(x)$ sont prises au même point physique de notre variété spatio-temporelle par notre simple décret mathématique de « fixer le système de coordonnées ». Il faut plutôt dire que, parce que $g_{\mu\nu}(x)$ et $g_{\mu\nu}'(x)$ sont différentes, elles correspondent à deux points[220] physiques différents de la variété. Si bien que les fonctions $g_{\mu\nu}$ et $g'_{\mu\nu}$ correspondent à deux façons *mathématiques* de paramétrer une seule et même réalité *physique*, la métrique définie par les deux fonctions isométriques $g_{\mu\nu}$ et $g'_{\mu\nu}$.

Cette absence de réalité physique du système de coordonnées, quand il n'est pas couplé avec le contenu de l'espace, a été une découverte fondamentale d'Einstein qui l'a mis sur la voie de l'achèvement de sa théorie en 1915. Il est notable cependant que, même si l'argument du trou est contré par ce biais, la théorie d'Einstein ne réalise cependant pas un principe de détermination de la métrique par la masse assez fort pour qu'une répartition de l'énergie-impulsion sur la totalité de l'espace-temps donne lieu à un seul $g_{\mu\nu}$, même à isométrie près. Nous indiquons en annexe quelques éléments sur ce point, cette problématique étant plus propre à Einstein qu'à Weyl et étant bien documentée dans la littérature spécialisée.

Cette remarque clôt notre bref résumé de l'argument du trou dans la pensée d'Einstein, et nous revenons au texte d'*Espace-Temps-Matière* où nous allons voir se développer un argument très proche de celui d'Einstein.

Voici le début du texte où Hermann Weyl effectue la démonstration de la proposition que nous avons rappelée ci-dessus :

> Prenons comme base un système de coordonnées déterminé x_i. Les mesures d'état [mesures de phase] scalaires, comme la densité de charge ρ, sont alors représentées par des fonctions déterminées :
>
> $$\rho=f(x_1 x_2 x_3)$$
>
> Considérons la forme fondamentale:

---

[220] Plus précisément, soit il s'agit de deux points différents de la variété, soit ce sont les mêmes points mais ce sont leurs voisinages qui sont paramétrés différemment. En effet, les valeurs de $g_{\mu\nu}$ ne changent pas seulement d'un point à un autre, mais aussi en fonction des dérivées $\frac{\partial x'}{\partial x}$.

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} dx_i \, dx_k$$

où les g_{ik} (tout comme dans la terminologie mathématique) dénotent certaines fonctions déterminées de x_1, x_2, x_3. Supposons de plus que soit donnée une quelconque transformation de l'espace en lui-même, par laquelle un point P' correspond à chaque point P. En utilisant ce système de coordonnées et les notations :

$$P = (x_1\, x_2\, x_3) \qquad\qquad P' = (x'_1\, x'_2\, x'_3)$$

la transformation sera alors exprimée par :

$$x'_i = \phi_i\, (x_1\, x_2\, x_3).$$

Cette transformations convertit une portion d'espace S en une portion d'espace S'. Je veux montrer que si l'opinion de Riemann est correcte, S' sera congruente avec S dans le sens défini.[221]

[221] Notre traduction de [RZM 1919, 90] :

Wir legen ein bestimmtes Koordinatensystem x_i zugrunde; die skalaren Zustandsgrößen wie die Elektrizitätsdichte ρ stellen sich dar durch bestimmte Funktionen

$$\rho = f(x_1\, x_2\, x_3),$$

die metrische Fundamentalform sei

$$\sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} dx_i \, dx_k,$$

wo die g_{ik} gleichfalls (im Sinne der „mathematischen „Bezeichnungsweise) bestimmte Funktionen von $x_1\, x_2\, x_3$ bedeuten. Ferner sei irgend eine stetige Abbildung des Raumes auf sich gegeben, durch die jedem Punkt *P* ein Punkt *P'* zugeordnet ist. Unter Benutzung des vorliegenden Koordinatensystems und der Bezeichnungen

$$P = (x_1\, x_2\, x_3), \; P' = (x'_1\, x'_2\, x'_3)$$

Werde diese Abbildung dargestellt durch

$$x'_i = \varphi_i(x_1\, x_2\, x_3). \tag{16}$$

Durch sie gehe ein Raumstück 𝔊 über in 𝔊 '; ich will zeigen, dass in dem erläuterten Sinne 𝔊' kongruent 𝔊 ist, falls Riemanns Ansicht zutrifft.

Ce début de texte pose le vocabulaire et les notions nécessaires pour la démonstration. Hermann Weyl choisit de représenter tout le contenu physique (matière) de l'espace par une seule fonction ρ qu'il considère comme étant une fonction scalaire de la position. Le motif d'Hermann Weyl est clair. Il s'agit de mettre de côté ce qui lui semble accessoire, la modélisation de la matière, pour mieux laisser apparaitre l'essentiel de son argumentation concernant les rapports entre cette matière, l'espace-temps et les relations métriques. Il nous semble que ces simplifications à visée didactique sont exagérées. Un lecteur scrupuleux pourrait lui reprocher de partir d'hypothèses incohérentes. Le problème ne réside pas dans le fait que la densité de matière est habituellement une densité et non pas un champ scalaire. Après tout, Hermann Weyl ne nous dit pas que sa fonction « ρ » représente la densité de matière usuelle. C'est juste un artefact pour la démonstration, censé représenter tout type de contenu physique. Le vrai problème vient du fait qu'Hermann Weyl a choisi des natures géométriques différentes pour la fonction « ρ » (scalaire) et le champ métrique $g_{\mu\nu}$ (tenseur doublement covariant). Dans l'argument originel d'Einstein, le tenseur $T_{\mu\nu}$ et le tenseur $g_{\mu\nu}$ sont de même nature, si bien que cela a un sens de se demander si l'un peut parfaitement déterminer l'autre. Dans le cas simplifié introduit par Weyl, l'hypothèse de la détermination de $g_{\mu\nu}$ par la fonction ρ est immédiatement réfutée par le fait que leurs natures géométriques sont différentes et qu'il existe des transformations de l'espace qui modifient les valeurs d'un champ de tenseurs sans modifier les valeurs du champ scalaire.

Nous avons averti le lecteur pour qu'il soit conscient de cette difficulté. L'essentiel cependant est de bien voir que cet abus de simplification de la part de Weyl, ne change rien à la validité générale de l'argument qui va suivre :

> Je veux montrer que si l'opinion de Riemann est correcte, S' sera congruente avec S dans le sens défini.
>
> Je vais, pour cela, utiliser un second système de coordonnées qui donnera au point P les valeurs « $x_{i'}$ » qui avaient été données par la formule (16) au point P'. Les expressions (16) deviennent alors des formules de changements de coordonnées. La région mathématique à trois variables [variété à 3 dimensions] représentée par *S* dans les coordonnées x' est identique à celle qui était représentée par S' dans les coordonnées x. Je vais maintenant imaginer qu'on remplit l'espace d'une nouvelle manière, précisément celle qui est exprimée par la formule :
>
> $$\rho = f\,(x'_1\ x'_2\ x'_3)$$[222]

[222] Pour bien suivre l'argument ici, il faut bien interpréter la lettre « f » comme désignant une fonction, comme le font habituellement les mathématiciens, et non pas comme une grandeur, comme le font habituellement les physiciens. C'est-à-dire qu'on pose que, exprimé dans le nouveau système de coordonnées, on aura $\rho\,(x_1\ x_2\ x_3) = f\,(x'_1\ x'_2\ x'_3)$ où les $(x_1\ x_2\ x_3)$ et les $(x'_1\ x'_2\ x'_3)$ désignent ici des valeurs numériques que l'on doit interpréter dans un seul et même système de coordonnées : le second.

au point P; et de même pour les autres quantités scalaires. Si les relations métriques de l'espace sont prises comme étant indépendantes de la matière qui y est contenue, la forme métrique sera, comme dans le cas de la première répartition de masse, de la forme :

$$\sum_{i,k} g_{ik} dx_i \ dx_k = \sum_{i,k} g'_{ik}(x'_1\, x'_2\, x'_3)\, dx'_i \ dx'_k$$

le membre de droite désignant l'expression après transformation dans le nouveau système de coordonnées. Si, en revanche, les relations métriques de l'espace sont déterminées par le contenu matériel -et nous admettons avec Riemann qu'il en est ainsi- alors, puisque la seconde répartition de la matière s'exprime dans les coordonnées x' exactement de la même manière que la première dans les coordonnées x, alors la forme métrique fondamentale sera :

$$\sum_{i,k} g_{ik}\, (x'_1\, x'_2\, x'_3)\, dx'_i dx'_k.$$

En conséquence des principes d'optique géométrique sous-jacents que nous avons acceptés plus haut, le contenu dans la portion d'espace S', lors de la première répartition de masse, présentera exactement la même apparence à un observateur en P' que celle que présente le contenu matériel en S à un observateur en P durant la seconde répartition de masse. Si l'ancienne opinion des « casernes à loyers » était correcte, cela ne serait évidemment pas le cas.[223]

[223] Notre traduction de [RZM 1921, 90] :

Ich benutze ein zweites Koordinatensystem, indem ich dem Punkte *P* die durch (16) gegebenen Zahlen x'_i als seine Koordinaten zuordne; (16) sind dann die Transformationsformeln. Derjenige mathematische Bereich in drei Variable, als welcher sich 𝔊 in den Koordinaten *x*' darstellt, ist identisch mit demjenigen, als welcher sich 𝔊 ' in den Koordinaten *x* darstellt. Ein beliebiger Punkt *P* hat in *x*' die gleichen Koordinaten wie *P*' in *x*. Ich denke mir nun den Raum auf eine zweite Weise durch einen materialen Gehalt erfüllt, und zwar so, wie es durch die Formeln

$$\rho = f(x'_1\, x'_2\, x'_3) \text{ im Punkte } P$$

Und die analogen für die übrigen skalaren Größen dargestellt wird. Wenn die Maßbestimmung des Raumes unabhängig von dem erfüllenden Materialen vorgegeben ist, wird die metrische Fundamentalform wie bei der ersten Erfüllung den Ausdruck haben:

$$\sum_{i,k} g_{ik} dx_i \ dx_k = \sum_{i,k} g'_{ik}(x'_1\, x'_2\, x'_3)\, dx'_i \ dx'_k;$$

dabei ist auf der rechten Seite die Transformation auf das zweite Koordinatensystem vollzogen. Wenn aber die Maßverhältnisse durch den materialen Gehalt bestimmt werden – und wir wollen jetzt mit Riemann annehmen, daß sich die Sache so verhält -, so wird, da die zweite Erfüllung sich genau so in den Koordinaten *x*' ausdrückt wie die erste in den Koordinaten *x*, bei dieser zweiten Erfüllung die metrische Fundamentalform lauten:

$$\sum_{i,k} g_{ik}\, (x'_1\, x'_2\, x'_3)\, dx'_i dx'_k.$$

Nach unserem Prinzip der geometrischen Optik wird dann einem Beobachter in *P*' der im Raumstück 𝔊 ' bei der ersten Erfüllung vorhandene Gehalt genau so erscheinen wie einem Beobachter in *P* das gemäß der zweiten Erfüllung im Raumstück 𝔊 vorhandene Materiale. Trifft jedoch die alte „Mietskasernen"-Auffassung zu, so ist da natürlich nicht der Fall.

La citation est longue, mais l'analyse que nous avons déjà faite de l'argument du trou chez Einstein va nous permettre de commenter rapidement ce passage.

On voit que l'essentiel du raisonnement de Weyl est basé sur le même jeu que chez Albert Einstein entre une interprétation *passive* et une interprétation *active* d'une transformation de l'espace. Chez Hermann Weyl, transformation active et transformation passive correspondent à ce que nous avons appelé ci-dessus interprétation subjectuelle et interprétation objectuelle d'une transformation spatiale, double interprétation fondée sur une similarité de nature entre le sujet-coordonnées et les objets spatiaux.

De manière plutôt anecdotique, la démarche d'Hermann Weyl va en sens inverse de celle d'Einstein, d'une interprétation active à une interprétation passive. En effet, après avoir choisi une portion d'espace S dont les points sont repérés par leur coordonnées, Hermann Weyl commence par considérer une transformation *active* ϕ de l'espace qui nous amène à considérer la nouvelle portion d'espace S' dans laquelle S est envoyée par ϕ. Puis, Weyl réinterprète passivement cette transformation pour donner aux points de S les anciennes coordonnées qu'avaient les points S' qui leur correspondent par ϕ. Enfin, un réaménagement de la répartition de la matière, qui joue le même rôle que le « tractage » du tenseur $T_{\mu\nu}$ dans la formulation moderne de l'argument d'Einstein, place l'observateur en P et la portion d'espace S dans la même position relativement à la distribution de matière que l'était la portion d'espace S' et l'observateur en P' dans la première distribution de matière. La démonstration de l'homogénéité de l'espace se termine en affirmant que S' présentera bien la même apparence visuelle à P' (dans la première répartition de la matière) que S pour P (dans la seconde répartition de la matière) pourvu qu'on adhère à l'hypothèse riemannienne de la dépendance de la métrique à l'égard de la matière.

Dans cette présentation des choses, l'hypothèse riemannienne d'une forme quadratique $g_{\mu\nu}(x)$ dépendante de la position, loin de mettre en péril l'homogénéité de l'espace comme cela avait pu être annoncé par Helmholtz ou Poincaré, devient au contraire *la garante de son homogénéité*, pourvu qu'elle soit couplée avec l'hypothèse de Riemann-Mach. Il y a ici un véritable tour de force que nous allons analyser sitôt que nous aurons terminé le commentaire du texte.

L'allusion aux « casernes à loyers » [Mietskasernen] est sans doute une référence au type d'habitation qu'on trouvait dans les camps militaires pendant la première guerre mondiale. Les camps étaient composés de bâtiments rectangulaires identiques, alignés les uns derrière les autres, laissant entre eux des voies parfaitement rectilignes formant un quadrillage à angles droits. Hermann Weyl se sert de cette image pour opposer le type de relation entre l'espace-temps et la matière qu'on trouve dans la géométrie d'un espace absolu comme chez Newton, et le type de relation entre espace-temps et matière dans une géométrie qui accepte les hypothèses riemanniennes. L'espace de Newton ressemble à un camp militaire. Il est muni d'une structure uniforme sur toute son étendue. La matière vient remplir cet espace sans qu'en aucune façon cela ne change sa structure. L'espace conserve la même structure uniforme, impassible à ce qui se joue en lui. Pour pousser un peu l'analogie avec le camp militaire, on peut remarquer qu'il n'y a sans doute aucun logement plus « impersonnel » qu'un bâtiment de caserne, aucun signe extérieur sur chaque bâtiment ne révélant quoi que ce soit de la personnalité individuelle de leurs occupants. A l'opposé de l'espace newtonien, un espace adoptant les hypothèses riemanniennes (telles que les comprend Weyl), n'est pas impassible face à la matière qui vient l'occuper. Chaque portion d'espace est modelée par la matière qui vient l'occuper et par l'interaction avec la matière qui lui est extérieure. La métrique n'est plus alors un quadrillage uniforme sur toute l'étendue de l'espace mais une structure dynamique qui s'adapte localement à son contenant. Einstein parlait, à propos de son propre espace qui respecte les hypothèses riemanniennes, d'un mollusque informe. Dans d'autres textes, Hermann Weyl précisera la zoologie de l'espace d'Einstein en parlant d'un escargot. Plus précisément, l'espace d'Einstein est vis-à-vis de la matière comme la coquille d'un escargot vis-à-vis de l'animal lui-même. La coquille et sa structure ne préexiste pas à l'animal, mais elle se construit avec lui et s'adapte au fur et à mesure que l'animal croit. Ces analogies sont un premier contact avec la distinction entre l'espace d'une Nahegeometrie, et l'espace d'une Ferngeometrie, distinction que nous thématiserons dans la dernière partie de notre travail.

Donnons la fin du texte :

> Le simple fait que je puisse presser une boule d'argile à modeler entre mes mains pour lui donner n'importe quelle forme régulière totalement différente d'une sphère pourrait nous sembler réduire l'opinion de Riemann à une absurdité. En réalité, cela ne prouve rien. Car si Riemann a bien raison, une déformation de la structure atomique interne de l'argile différente de celle que je peux effectuer avec mes mains, <u>et un réarrangement des masses de l'Univers</u>, serai<u>en</u>t nécessaire<u>s</u>, pour que la balle distordue soit amenée à apparaître sphériquement à un observateur en un point de vue quelconque. <u>Le point essentiel est qu'un morceau d'espace n'a pas de forme visuelle du tout, mais que cette forme dépend du contenu matériel occupant le monde, et, en effet, en l'occupant de telle sorte que par le biais d'un réarrangement approprié du mode d'occupation (de la matière), je peux lui donner n'importe quelle forme visuelle. Par là, je peux également transformer n'importe quels morceaux *différents* d'espace pour leur donner la *même* forme visuelle en choisissant le mode de répartition de la matière adapté.</u> Einstein a aidé à faire triompher des idées de Riemann.[224]

[224] [RZM 1919, 90-91] et [RZM 1921, 90-91]. Notre traduction. Nous soulignons les parties rajoutées à l'occasion de la 4ème édition :

> Die einfache Tatsache, dass ich eine Plastelinkugel in meiner Hand zu einer beliebigen Missgestalt zerdrücken kann, die ganz anders aussieht als eine Kugel, scheint den Riemannschen Standpunkt ad absurdum zu führen. Dies ist jedoch nicht beweisend; denn es wird wohl, wenn Riemann recht hat, u.a. eine ganz andere Deformation der inneren atomischen Struktur des Plastelins nötig sein, als ich durch meine Hand bewirken kann, <u>und eine Umordnung aller Massen um Universum</u>, damit die verdrückte Gestalt einem

Ici se termine le texte de Weyl qui semble mimer l'argument d'Einstein. On perçoit cependant une différence capitale. La portion d'espace sur laquelle Einstein résonnait pour penser les rapports de la matière à l'espace-temps était un « trou ». Au contraire, Hermann Weyl se sert d'une portion de l'espace qui contient de la matière, en l'occurrence une boule d'argile. La différence peut s'expliquer par un changement de motivation d'Einstein à Weyl. Einstein se plaçait dans un cadre plus restreint où l'équation qui donne de lien entre les propriétés métriques et la matière était précisée sous la forme d'une égalité tensorielle « $G_{\mu\nu}=T_{\mu\nu}$ ». Dans ce cadre, le problème qu'il posait consistait à savoir si une détermination complète de la métrique par la matière était possible. Hermann Weyl se place dans un cadre plus général dans la mesure où il ne précise pas les équations qui corrèlent matière et métrique. Cette corrélation, posée par le principe de Riemann-Mach, est passée d'Einstein à Weyl du statut de problème à celui d'une hypothèse de départ du raisonnement (d'où les simplifications parfois abusives que Weyl se permet). Le nouveau problème d'Hermann Weyl consiste à montrer que, avec une telle métrique dépendant de la matière, on récupère une forme d'homogénéité de l'espace, pourvu qu'on conçoive bien la métrique comme une structure dynamique, capable de s'adapter localement à son contenu.

Si l'homogénéité de l'espace signifie qu'une transformation continue de l'espace ne devrait pas modifier l'apparence visuelle des objets, comment expliquer qu'on puisse déformer continument une boule d'argile entre nos mains pour lui donner diverses apparences ? Cette difficulté est un faux problème pour Hermann Weyl tout comme l'argument du trou révélé l'être pour Einstein. Toutefois, dans les deux cas, arriver à montrer qu'il s'agit d'un faux problème nécessite d'avoir une conception claire des rapports entre l'espace-temps et la matière, entre la topologie et la métrique, et entre les mathématiques et la physique. Si bien que savoir déjouer ces faux problèmes d'apparences futiles, chez Einstein comme chez Weyl, est le signe qu'on a atteint l'essentiel de la compréhension des liens qui se jouent entre l'espace(-temps) et la matière.

On sait qu'Einstein, pour déjouer son propre argument du trou, avait mis en exergue l'absence de signification physique du système de coordonnées quand il n'est pas couplé avec la donnée de la répartition du contenu physique. Au début du paragraphe, Hermann Weyl semble au contraire chercher à donner une signification physique à la transformation qu'il envisage. Supposons en effet qu'on ait fixé un système de coordonnées dans notre

Beobachter von allen Seiten als kugelförmig erscheint. […] <u>Die Sache ist eben die, daß einem Raumstück an sich überhaupt keine visuelle Gestalt zukommt, sondern die letztere von dem die Welt erfüllenden materiellen Gehalt abhängt, und zwar so, daß ich durch eine geeignete Erfüllung ihm jede beliebige visuelle Gestalt erteilen kann. Däfur kann ich dann auch an irgend *verschiedenen* Ramstück durch geeignete Erfüllung die *gleiche* visuelle Gestalt hervorzaubern.</u> Einstein hat dem Riemannschen Gedanken zum Siege verholfen (ohne freilich direkt durch Riemann beinflusst zu sein).

espace. Puisque la forme finale F' du morceau d'argile est supposée avoir été obtenue continument à partir de sa forme sphérique initiale F, les deux portions d'espace S' et S contenant ces deux formes dans notre système de coordonnées doivent pouvoir être envoyées l'une sur l'autre par une transformation ϕ. Mais, ce n'est pas suffisant pour dire que les deux formes doivent être identiques. Encore faudrait-il que le malaxage que nous avons fait subir à la boule d'argile ait entrainé une répartition de la matière vis-à-vis de S' similaire à l'ancienne répartition vis-à-vis de S (au sens ci-dessus du « tractage » de la fonction ρ) Si la boule parait finalement avoir changé de forme, c'est que la nouvelle répartition de la matière ne répond pas à cette attente. La répartition de matière étant différente, le champ métrique a changé. Hermann Weyl semble hésiter ici sur la façon dont il faudrait procéder (théoriquement) pour effectuer correctement, à un niveau physique, le réajustement correct de la matière. Le problème relève-t-il de l'échelle microscopique, de ce qui s'est passé au niveau atomique ou moléculaire lors du malaxage de la boule d'argile ? Ne serait-ce pas plutôt un problème macroscopique voire même cosmologique, au sens où il faudrait modifier toute la répartition de la matière dans le cosmos pour rétablir la bonne métrique dans S' et en P' ? La réponse que donne Hermann Weyl à cette question est assez étrange et hésitante, d'édition en édition. Sans doute, une analyse plus fine montrerait qu'Hermann Weyl est embarrassé encore une fois par la modélisation abusivement simple qu'il a adoptée pour représenter la matière[225] ?

Quoi qu'il en soit, Hermann Weyl a bien repéré la leçon essentielle à retenir de cette réflexion sur les liens entre les coefficients de la métrique et le contenu de l'espace :

> qu'un morceau d'espace n'a pas de forme visuelle du tout, mais que cette forme dépend du contenu matériel occupant le monde.

Qu'un morceau d'espace n'ait pas de forme visuelle, compte tenu des hypothèses optiques qu'il a posées, est équivalent à dire que les coefficients de la métrique ne sont pas déterminés à l'intérieur de ce morceau. L'espace en tant que tel, préalablement à la considération de la matière, n'a donc que des propriétés topologiques et non pas métriques. Seule la matière, venant occuper l'espace, détermine les relations métriques internes à chaque portion de l'espace. Et Hermann Weyl va jusqu'à affirmer hardiment qu'on peut amener deux portions quelconques de l'espace à avoir la même forme, en choisissant la répartition de la matière adéquate[226].

[225] Cf. notre annexe 3 (III.6.).

[226] Nous disons que l'affirmation est hardie car Hermann Weyl ne prend pas ici les précautions d'usage en ce qui concerne la topologie des portions d'espace considérées. Deux portions de l'espace, par le réajustement de la répartition de la matière, ne pourront bien sûr prendre une même forme métrique uniquement si elles sont dès le départ homéomorphes, toute transformation de l'espace envisagée, étant un homéomorphisme (et même un difféomorphisme), préservant ainsi les propriétés topologiques. Par exemple, pour garder l'image d'Hermann

Weyl, jamais une boule d'argile ayant la forme d'une sphère pleine ne pourrait prendre la forme d'une sphère creuse, par le simple jeu d'un déplacement continu de la matière sur l'espace.

Hermann Weyl ayant démontré que deux portions de l'espace S et S' (homéomorphes) peuvent servir à accueillir indifféremment la même configuration de la métrique $g_{\mu\nu}$, on peut se demander si, réciproquement, tout type de configuration métrique imaginable (et ayant la topologie adaptée) peut être réalisé par le jeu de la répartition de la matière. Pour répondre à cette deuxième question, il faudrait disposer d'une théorie de la façon dont la métrique est déterminée par la matière, ce qu'Hermann Weyl ne s'est pas encore donné à ce moment de l'écrit.

Une telle proposition est-elle vraie dans le cas de la théorie de la relativité générale ? La question pourrait être reformulée comme suit en considérant l'espace entier plutôt qu'une de ses parties : tout espace de Riemann (V, g) (V désigne la variété sur laquelle est définie la forme quadratique différentielle g) de dimension 4 et de signature + - - - est-il solution des équations d'Einstein pour une certaine répartition de la matière (V, $T_{\mu\nu}$) ?

Sans avoir trouvé la confirmation dans la littérature scientifique, il nous semble que la réponse est positive. Ne suffit-il pas de calculer le tenseur d'Einstein pour la métrique 'g' recherchée, pour trouver la répartition de la matière convenable en vertu des équations d'Einstein ? Il faut bien sûr faire attention au fait qu'il n'y a pas unicité en général de la solution des équations d'Einstein, si on cherche à retrouver le $g_{\mu\nu}$ à partir du $T_{\mu\nu}$ que nous avons déterminé.

3. Exclusion de la métrique hors de la notion d'espace

Revenons au problème initial qu'avait posé Hermann Weyl et analysons comment son argumentation y répond. Nous nous étions demandés avec lui si l'homogénéité nécessaire de l'espace devait nous amener à mettre à l'écart les géométries à courbures variables. Henri Poincaré et Ludwig Helmholtz avait répondu affirmativement à cette question. Hermann Weyl répond de façon opposée. Une métrique riemannienne apparait comme une condition nécessaire pour sauver l'homogénéité de l'espace, sitôt qu'on a accepté le principe de Riemann-Mach d'une détermination de la métrique par la matière. On a cependant l'impression, à la lecture de cette argumentation, qu'il y a un tour de force. Elle n'est qu'à moitié convaincante car, à regarder de près les prémisses de sa démonstration, on se rend compte qu'Hermann Weyl n'a sauvé l'homogénéité de l'espace qu'en lui ôtant ses caractéristiques métriques. Plus précisément, il a montré que l'espace était homogène car la métrique pouvait se déplacer simultanément avec la matière à l'intérieur d'un espace qui a bien conservé son caractère homogène, mais seulement au prix qu'il n'est plus caractérisé que par ses propriétés topologiques et différentielles.

Il y a toujours une métrique mais celle-ci ne fait pas plus partie des caractéristiques de l'espace lui-même. Elle a pris le statut d'un objet physique *contenu* dans l'espace, mais étant d'une certaine façon extérieure à sa nature, au même titre que la matière qui la détermine. Le vocabulaire employé par Hermann Weyl est éloquent :

> Les relations métriques ne sont pas à mettre au compte de l'espace comme forme des phénomènes mais au compte du comportement physique des règles de mesure et des rayons lumineux, en tant qu'ils sont déterminés par le champ gravitationnel[227].

Pour le moment, ce n'est pas le détail des phénomènes physiques en jeu qui nous intéresse ici mais toujours le simple fait que les relations métriques soient déterminées par des propriétés physiques de la matière. La forme d'hétérogénéité que possède la métrique employée par la théorie de la relativité générale n'amène pas Hermann Weyl à réviser sa conception idéaliste de l'espace comme forme des apparences. Il conserve plutôt cette idée et exclut la métrique de l'espace.

[227] [RZM 1919, 85], notre traduction de :

> Die Maß Verhältnisse kommen aber nicht auf Rechnung des Raumes als Form der Erscheinungen, sondern auf Rechnung des durch das Gravitationsfeld bestimmten physikalischen Verhaltens von Maßstäben und Lichtstrahlen.

Si la métrique d'Einstein est hétérogène, ce n'est pas un accident de sa théorie. Selon Hermann Weyl, c'est une conséquence nécessaire des hypothèses riemanniennes qui ont été adoptées (sans appel implicite à Riemann) par Einstein. Comme l'a montré l'argument de la boule d'argile, si le champ des relations métriques est un résultat des interactions de la matière, il devra nécessairement être hétérogène et dynamique étant donné que la matière elle-même possède ces qualités. Il se dessine ainsi dans la pensée d'Hermann Weyl l'idée que la position ontologique sur l'espace que l'on attribue généralement à Leibniz, dans le cadre de sa controverse avec Clarke, c'est-à-dire l'idée que l'espace ne serait pas une sorte de théâtre existant par soi et susceptible de recevoir ensuite la matière mais plutôt le résultat des relations des éléments de matière les uns avec les autres ; cette idée donc ne saurait trouver sa pleine confirmation qu'au sein d'une géométrie qui adopte le point de vue riemannien.

Ainsi donc, si la métrique est hétérogène mais que l'espace comme forme des apparences est, par essence même, homogène, c'est que la métrique n'est pas une composante de l'espace mais un objet extérieur au même sens que l'est la matière ou les champs, bref le *contenu* de l'espace. Il y a bien une forme de holisme géométrico-physique dans l'épistémologie d'*Espace-Temps-Matière*, le système complet géométrie mathématique/mécanique/physique ne prenant sens qu'en bloc face à l'expérience. Cependant, tant qu'on en reste à la position qu'Hermann Weyl développe dans le paragraphe 12 d'*Espace-Temps-Matière*, et qu'on peut voir comme une première position encore inaboutie de sa pensée, la part qui revient à la géométrie mathématique semble réduite drastiquement. Les relations métriques sont exclues de la sphère de la géométrie mathématique, mais implicitement aussi les relations affines et conformes qui, dans une géométrie riemannienne, sont dépendantes des valeurs que prennent la métrique.

La géométrie mathématique, qui traite conceptuellement de cet espace dépourvu de relations métriques, est alors réduite à être une topologie. Hermann Weyl avait commencé son paragraphe 11 sur la géométrie de Riemann en affirmant que:

> « La propriété la plus originelle de l'espace est que ses points forment une variété à 3 dimensions »[228]

Cette notion de variété à 3 dimensions est bien celle que nous connaissons encore de nos jours sous ce nom et dont les origines remontent à Riemann. Il s'agit bien d'une notion topologique. Si on s'en tient à l'argument du paragraphe 12 *d'Espace-Temps-Matière* et à

---

[228]Notre traduction de [RZM 1919, 75]:

> Die ursprünglichste Eigenschaft des Raumes ist die, daß seine Punkte eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit bilden.

l'argument de la boule d'argile, il faut alors reconnaitre que cette propriété « la plus originelle » de l'espace est finalement la seule que l'on puisse lui attribuer en propre. Toutes les autres propriétés (métriques, etc.) qu'on lui accorde habituellement ne lui sont attribuées qu'improprement. Elles devraient être attribuées aux objets physiques contenus dans l'espace (et de manière primordiale au champ de gravitation) et non pas à l'espace lui-même.

Cette exclusion de la métrique des propriétés intrinsèques à l'espace comme forme des apparences avait été en fait anticipée par Weyl et préparée lors de son analyse de la notion mathématique d'espace. Souvenons-nous en effet que, au moment de présenter la strate métrique de l'espace euclidien, Hermann Weyl avait proposé deux façons différentes de traiter la métrique. Il s'agissait ou bien de ne considérer que des transformations qui respectent les relations métriques, des « congruences », et d'écrire les relations géométriques sous la forme d'équations invariantes vis-à-vis de ces congruences, ou bien d'admettre plus largement toute transformation continue, mais d'insérer dans nos formules un nouvel objet, la forme quadratique $g_{\mu\nu}$ définissant la métrique. Cette seconde possibilité avait été choisie par Weyl avec comme seul argument un effet d'annonce, l'idée que ce serait cette façon de présenter les choses qui se généraliserait lorsqu'on passerait de la géométrie euclidienne à celle de Riemann. On en comprend à présent les raisons. En admettant comme transformations spatiales toutes les transformations continues, Hermann Weyl avait mis en avant les propriétés « les plus originelles » de l'espace, c'est-à-dire ses propriétés topologiques. L'exclusion de la métrique est marquée par le fait qu'on lui ait attribué une « nature géométrique », précisément d'être une forme quadratique, de la même façon qu'on attribue une nature géométrique (vecteur, tenseur…) à tout objet physique contenu dans l'espace.

Il faut concéder à Hermann Weyl que cette position pour penser les rapports entre géométrie mathématique et géométrie physique est cohérente avec l'épistémologie qu'il a développée jusqu'ici et dont nous avons traité dans ces trois premières parties de notre travail. En effet, si l'espace au sens mathématique du terme se doit d'être une structure homogène qui fonde *a priori* l'objectivité de notre rapport à l'étendue et de toute mesure en général, et si un jeu de relations métriques homogène est incompatible avec la seule façon légitime de penser les rapports entre la matière et l'espace-temps, i.e. en posant la détermination de la métrique par la matière, alors la seule conclusion cohérente consiste à exclure les relations métriques du domaine des mathématiques. Elles ne font plus partie de l'espace comme objet de la géométrie mathématique mais sont passées du côté de son contenu, de la matière, objet de la physique. Il en est de même des relations affines et conformes. Des multiples strates que nous avions rencontrées quand Hermann Weyl en était resté à une conception euclidienne de l'espace, au début d'*Espace-Temps-Matière,* pour développer la notion mathématique d'espace, il ne subsiste finalement que la strate topologique, sitôt qu'on est rentré dans le règne de la géométrie riemannienne.

Pour cohérente qu'elle soit avec les principes épistémologiques de Weyl que nous avons développés, cette réduction drastique de toute la géométrie mathématique à la seule topologie n'est pas satisfaisante. Réduire la géométrie mathématique à la seule topologie est d'abord intenable sur le plan de l'histoire de la discipline. La topologie représente non seulement qu'une branche de tout le corpus de ce qu'on considérait jusqu'alors comme de la géométrie, mais elle était même la dernière branche à en être sortie ; discipline récente et à laquelle il serait étonnant de réduire finalement l'ensemble de la géométrie.

Mais, si cette réduction drastique du domaine de la géométrie est insatisfaisante, c'est surtout parce que cette vue radicale nous oblige à concéder trop à la géométrie physique, au vu même de la façon dont la géométrie différentielle s'est constituée préalablement aux premières mesures physiques de l'espace chez Gauss. En effet, quand Friedrich Gauss au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, mesurait la courbure de l'espace à l'intérieur d'un triangle entre trois villes allemandes, les *coefficients* de la métrique qui étaient mesurés avaient de plein droit un statut physique. Mais, il n'en reste pas moins vrai qu'on voudrait pouvoir exprimer, dans notre épistémologie, le fait que cette mesure physique n'a pu être possible que parce que Gauss avait établi une notion mathématique générale, celle des espaces courbes et de la métrique à coefficients variables, qui était un préalable mathématique, condition de possibilité d'une telle mesure, tout comme, dans les géométries admettant une homogénéité au sens de Klein, l'espace et son groupe de transformations était un préalable mathématique à la mesure physique, non plus cette fois certes de l'espace lui-même, mais de son contenu. On ne peut admettre de façon brutale que les mathématiques se soient retirées des considérations métriques. Sinon, comment comprendre les œuvres d'un Riemann, d'un Levi-Civita, etc. ?

Si on retourne au texte de Weyl avec cette idée en tête, on s'aperçoit vite que la conclusion du raisonnement de la boule d'argile est en fait plus fine. Il n'affirme pas brutalement que la métrique ne fait plus partie des caractéristiques de l'espace mathématique. En toute rigueur, Weyl énonce ceci :

> Les relations métriques ne sont pas des propriétés de l'espace *en soi* mais de l'espace dans sa relation avec son contenu matériel.

Malgré la nuance apportée, il restait encore à trouver quel sens exact on pouvait donner à cette interaction entre deux entités aussi disparates qu'un espace mathématique d'un côté, et son contenu physique de l'autre. Si les relations métriques naissent de l'interaction entre les deux, entre l'espace et son contenu, c'est que leur statut est mixte, entre mathématique et physique. Où se situe la frontière entre le mathématique et le physique au sein la métrique ? Comment justifier épistémologiquement cette frontière ? A défaut de la notion kleinienne d'homogénéité, peut-on forger une nouvelle notion d'homogénéité qui nous permette de cerner le mathématique au sein des relations métriques ?

La pensée d'Hermann Weyl va fournir une réponse à toutes ces questions à travers l'assomption de plus en plus consciente et l'achèvement d'un changement de perspective en géométrie : le passage d'une Ferngeometrie à une Nahegeometrie, avec tout ce que cela implique concernant les rapports entre mathématiques et physique. La pensée géométrique d'Hermann Weyl dans la période 1917-1923 atteint sa maturité lorsqu'il parvient à comprendre comment l'épistémologie des sciences de l'espace doit évoluer pour se conformer, accompagner et justifier ce changement de perspective.

Très tôt après la publication de la première édition *d'Espace-Temps-Matière,* Hermann Weyl parfait sa position épistémologique sur les relations du mathématique au physique à partir d'une idée qui découle naturellement de la position de Riemann. Weyl remarque que le sujet incarné dans le monde qui permet l'ancrage de la géométrie mathématique dans la réalité physique est toujours un sujet ponctuel localisé en un lieu singulier du monde. C'est l'œil-ponctuel de tout à l'heure. En mettant l'accent sur cette nature essentiellement locale du sujet, Weyl met le doigt sur ce qui est pour lui l'erreur fondamentale d'Immanuel Kant qui l'avait amené à accepter la géométrie euclidienne qui est une géométrie rigide à distance, une « Mietskasern » au sens où le sont encore toutes les géométries de Klein. C'est ce passage d'une Ferngeometrie à une Nahegeometrie, et cette mutation corrélative dans la façon de comprendre la notion de sujet qui va occuper notre dernière partie. On y trouvera ce qui nous a semblé le point culminant de la pensée épistémologique d'Hermann Weyl sur la notion d'espace.

4. Annexe 1 : Détermination de la nature de la métrique dans les *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*.

Le schéma de la détermination de la métrique en deux temps (1. Détermination de la nature de la métrique et 2. Détermination de la façon dont les valeurs numériques de la métrique sont influencées par la réalité physique) est hérité par Weyl de l'approche de Bernhard Riemann. Dans les *Hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, Riemann propose une première tentative pour déterminer la nature de la métrique, c'est-à-dire remplir la première des déterminations par une voie purement conceptuelle, laissant la seconde étape à la science physique.

Pour résoudre ce problème, Riemann pose certaines hypothèses que nous avons rappelées (cf. p141 et notes 205 à 209). L'espace est une variété E à n dimensions (implicitement : une variété *différentiable*). La distance d(P, P') entre deux points de la variété doit vérifier une hypothèse simple de compatibilité avec la structure de variété différentiable et doit être en particulier localement homogène (cf. note 207). De plus, pour P fixé, on doit avoir une certaine application continue réelle φ telle que la fonction $P' \to \varphi(d(P, P'))$ qu'on a appelée $\phi_{P,}$ soit une fonction différentiable du lieu ; ceci afin que les « sphères » $\{P' \in E/d(P, P')=d\}$ (*d* distance fixée) soient bien des sous-variétés (différentiables) de l'espace. On peut poser, sans perte de généralité, que $\varphi(0)=0$.

Le raisonnement de Riemann peut être développé comme suit. La fonction ϕ_P va devoir croître ou décroître dans toutes les directions en partant du point P, au vu de la façon dont elle a été définie. Elle admet ainsi un extrémum (au moins local) au point P. La propriété des fonctions dérivables admettant un extrémum nous indique alors que le premier ordre de dérivation (en P) non nul est pair et que la dérivée correspondante conserve un signe constant. Supposons alors que la dérivée première en P est nulle et que la dérivée du second ordre est toujours non nulle. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'elle est toujours positive. C'est alors une forme bilinéaire définie positive. Ainsi, si on note P' le point de coordonnées x^i+dx^i, la forme la plus simple à considérer pour ϕ_P est :

$$\phi_P (P') = \frac{\partial^2 \phi_P}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$$

Notons que, pour simplifier les formules, nous emploierons l'abus d'écriture consistant à identifier les fonctions considérées comme des fonctions *d'un point de la* *variété*, et les fonctions correspondantes *des coordonnées*. Cela revient à fixer une fois pour toutes un système de coordonnées.

Prenons à présent deux points P’(x^i+dx^i) et P’’($x^i+\lambda dx^i$) (λ réel) dans le voisinage infinitésimal de P, comme dans la note 207. L’homogénéité locale de la fonction distance donne :

$$d(P, P'') = |\lambda|\, d(P, P') \qquad (*)$$

Ainsi :

$\varphi(\lvert\lambda\rvert\, d(P, P'))$	$= \varphi(d(P, P''))$	(par (*))
	$= \phi_P(P'')$	(Définition de ϕ_P et de φ)
	$= \frac{\partial^2\phi_P}{\partial x^i \partial x^j}(\lambda dx^i, \lambda dx^j)$	(Hypothèse sur la forme de ϕ_P)
	$= \lambda^2 \frac{\partial^2\phi_P}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$	(La dérivée seconde est bilinéaire)
	$= \lambda^2 \phi_P(P')$	(Hypothèse sur la forme de ϕ_P)
	$= \lambda^2 \varphi(d(P, P'))$	(Définition de ϕ_P et de φ)

Cette égalité étant valide pour tout λ, cela nous suggère de prendre pour fonction φ la fonction carrée. La distance d s’obtient donc finalement comme :

> « racine carrée d’une fonction entière homogène du second degré toujours positive des quantités dx^i, dans laquelle les coefficients sont des fonctions continues de x^i. »[229].

Ainsi, avec l’hypothèse la plus simple, où $\phi_P(P') = \frac{\partial^2\phi_P}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j$, la métrique aura la forme usuelle ; i.e. ce sera la racine carrée d’une forme quadratique définie positive. Autrement dit, on sera dans un « espace de Riemann » :

$$d(P, P') = \sqrt[2]{\frac{\partial^2\phi_P}{\partial x^i \partial x^j}\, dx^i dx^j}$$

Mais, d’une manière générale, on pourra seulement dire que la métrique est la racine carrée d’une fonction entière homogène du second degré. Si, on refuse l’hypothèse ad hoc

[229] [Riemann 1854, 287]

du caractère toujours non nul de la dérivée seconde de ϕ_P, la propriété des fonctions dérivables admettant un extrémum nous indiquera cependant que le premier ordre de dérivation non nul sera pair, disons 2n. Et la métrique pourra aussi être obtenue comme racine 2n^{ième} d'une expression différentielle du 2n^{ième} ordre.

Par exemple :

d(P, P') = $\sqrt[4]{\frac{\partial^4 \phi_P}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k \partial x^l} \mathrm{dx^i dx^j dx^k dx^l}}$ ou comme la racine 6ème d'une forme différentielle du 6ème ordre, etc.

5. Annexe 2 : Jusqu'à quel point les relations métriques sont déterminées par la répartition de l'énergie-impulsion dans la théorie d'Einstein ?

Les équations finales d'Einstein sont des équations différentielles non linéaires du second ordre qui posent l'égalité entre le tenseur $T_{\mu\nu}$ exprimant la répartition dans l'espace-temps de l'énergie-impulsion et le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}=.R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}R*g_{\mu\nu}$ $(+\lambda g_{\mu\nu})$ qui est une fonctionnelle du tenseur $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées premières $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}$ et secondes $\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{(\partial x^{\rho})^2}$.

L'énergie-impulsion, même si elle est connue sur la totalité de l'espace-temps, ne détermine donc pas totalement la métrique mais seulement son « évolution » au cours du temps, évolution décrite par le biais de cette sorte de courbure d'espace-temps qu'est le tenseur d'Einstein. Plusieurs fonctions $g_{\mu\nu}$ non isométriques peuvent avoir le même tenseur d'Einstein partout sur l'espace-temps.

On sait qu'une portion d'espace-temps où le tenseur d'Einstein s'annule (comme dans un trou !) peut décrire aussi bien une portion de l'espace de Minkowski, qu'une portion d'un espace de Schwarzschild, ou encore une portion d'un espace plus complexe traversé par des ondes gravitationnelles diverses comme ce serait le cas dans une portion vide de l'espace à proximité de phénomènes gravitationnels divers. Les solutions de l'équation $G_{\mu\nu}=.0$ sont d'une manière générale les *variétés einsteiniennes* qui sont très diversifiées. Cette variété de solutions n'est pas due à la non-linéarité des équations puisqu'un phénomène similaire intervenait déjà avec le problème de Dirichlet pour les équations (linéaires) de l'électromagnétisme classique. Les équations de Poisson $\Delta\phi=0$ exprimant l'état du champ électrique dans une portion de l'espace sans charge, donnaient déjà lieu à une infinité de solutions exprimant toutes les formes de champs électriques susceptibles d'être rencontrées dans une portion vide de l'espace. La diversité était ici due au fait que l'état du champ électrique à l'intérieur de notre portion d'espace vide de charge dépend en partie de la répartition des charges situées en dehors de la portion concernée.

Dans le cas des équations d'Einstein, le fait de considérer l'espace-temps dans sa totalité et non pas uniquement une portion, ne rétablit pas l'unicité de la solution (l'unicité du tenseur $g_{\mu\nu}$ pour un $G_{\mu\nu}$ donné).

La connaissance de la répartition de l'énergie-impulsion sur tout l'espace-temps ajoutée à la connaissance des $g_{\mu\nu}$ sur une hypersurface de type « espace » ne suffit toujours pas à connaitre univoquement l'évolution temporelle de la métrique dans le futur ou le passé proche de cette hypersurface. Par contre, la connaissance de la répartition de l'énergie-impulsion sur tout l'espace-temps, ajoutée à la connaissance des $g_{\mu\nu}$ *et des* $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}}$sur une hypersurface de type « espace » donne lieu à une solution locale unique (i.e. à une fonction $g_{\mu\nu}$, définie à isométrie près, au moins dans le passé proche et le futur proche de l'hypersurface considérée).

Pour résumer, dans la théorie d'Einstein, la connaissance de la répartition de l'énergie-impulsion sur tout l'espace temps ne permet pas de déterminer univoquement la métrique. En revanche, si on connait de plus la métrique et ses dérivées premières sur tout l'espace au temps t=0, alors nous pouvons la déterminer univoquement pour les temps futurs. Ainsi, la métrique n'apparait pas comme un objet physique qui serait complètement réductible à la matière. C'est un objet physique qui a une certaine dépendance à l'égard de la matière. En ce sens là, on peut y voir, comme Einstein l'a parfois suggéré, une forme de retour à un « éther » (quoique de nature gravitationnelle et non pas électromagnétique)

De même que, dans la physique de Newton, la connaissance des lois de la mécanique et des grandeurs intrinsèques (masses, charges électriques) permet de connaitre l'évolution d'un système pourvu qu'on connaissance les positions et les vitesses initiales des corps en présence, dans la physique d'Einstein, la connaissance de la répartition de la masse dans l'espace-temps ne permet de connaitre la métrique sur tout l'espace-temps que si on connait ses valeurs initiales et sa « dérivée ». Pour résumer cela dans un langage philosophique, on dirait que la masse détermine la dynamique du champ métrique sans qu'on puisse réduire ontologiquement la métrique à la masse comme étant purement une de ses qualités émergentes. Energie-impulsion et métrique sont deux champs dynamiques en interaction. Si bien que, au cas où nous chercherions une ontologie moniste pour la physique d'Einstein, il faudrait la chercher du côté de la notion de champ dynamique en général, plutôt que du côté de la substance matérielle même sous sa forme dynamique du champ d'énergie-impulsion. Vouloir donner une primauté ontologique au champ dynamique « tenseur énergie-impulsion » par rapport aux autres champs comme le champ métrique est sans doute un réflexe issu de la longue tradition de la philosophie de la substance (avec cette idée que la substance doit précéder ontologiquement ses propriétés qui se réduisent ici aux champs qui en émanent).

Notons que l'histoire du principe de Mach (détermination complète de la métrique par la matière), de ses diverses interprétations, et de la caractérisation exacte des formes de ce principe qui valent ou non pour la théorie de la relativité générale, est une question d'une très grande complexité tant mathématique que conceptuelle. Cette courte annexe ne prétend donc en aucun cas à une exhaustivité, ni même à un survol de tous les principaux sous-problèmes qui se posent à quiconque étudie le principe de Mach dans son rapport à la théorie de la relativité générale. Il s'agissait simplement de montrer la complexité de ce problème sur lequel Hermann Weyl, au contraire d'Einstein, passe rapidement en raison de la problématique différente qui est la sienne. Nous voyons que le principe de détermination du champ métrique par la matière, qui prend le statut d'hypothèse plutôt que de problème dans l'argument du morceau d'argile d'Hermann Weyl, ne va pas de soi dans la théorie d'Albert Einstein.

6. Annexe 3 : Comment répondrait-on à l'argumentation d'Hermann Weyl de la boule d'argile en théorie de la relativité générale ?

Pour jeter quelques lumières nouvelles sur l'argument de la boule d'argile, tel qu'il est avancé par Hermann Weyl dans le paragraphe 12 d'*Espace-Temps-Matière*, on va réfléchir à la façon dont le problème pourrait être résolu dans le cadre précis de la théorie d'Einstein.

Supposons, comme dans l'argument d'Hermann Weyl, que nous malaxions une boule d'argile, lui faisant subir une déformation continue. La déformation est une opération physique. Elle n'a évidemment pas lieu à l'intérieur de l'espace-temps purement mathématique des coordonnées. C'est au sein du *champ métrique local*, qui est un champ physique dynamique en interaction avec l'ensemble de la matière du cosmos, que nous malaxons notre boule d'argile. Si elle change de forme, c'est que le déplacement des particules d'argile, de masses infimes, n'induit certainement pas le changement radical de l'état du champ métrique local que nous attendrions pour rétablir la forme sphérique de la boule d'argile. Selon la théorie de la relativité générale, l'état local de la métrique, là où nous malaxons la boule, reste avant tout déterminé par son état antérieur et par les grandes masses en présence dans l'Univers. Il n'a changé que de manière infime, même si la déformation de la boule d'argile était importante.

Si nous nous rappelons l'argument du trou, la possibilité d'utiliser un difféomorphisme qui se confond avec l'identité en dehors d'une petite région où se situe la boule d'argile, semble indiquer que la considération des masses lointaines n'est pas pertinente ici. En fait, ce serait vrai si, comme dans l'argument du trou, la transformation que nous utilisions tractait automatiquement, par définition, tous les champs définis sur la portion d'espace-temps correspondant à la boule d'argile déplacée, y *compris le champ métrique*. Dans la description *mathématique* d'un changement de coordonnées, cela avait une signification claire. Mais ici cela n'est plus le cas. Dans l'expérience physique du malaxage d'une boule d'argile, nous ne malaxons bien sûr pas simultanément le champ métrique lui-même (!)

Si on veut modifier notablement l'état du champ métrique dans la région où nous avons déformé notre boule d'argile, pour qu'elle retrouve sa forme initiale, il faut alors sans doute opérer une réorganisation importante des grandes masses de l'Univers qui déterminent principalement l'état du champ métrique dans la région considérée. Mais alors, comment donner sens au fait que notre boule d'argile continuerait à occuper *la même portion d'espace-temps*, pendant que nous sommes occupés à imaginer un bouleversement radical dans l'organisation de la matière dans l'Univers ?

On tomberait dans une impasse car il faudrait, pour cela, que notre système de coordonnées ait un sens physique, indépendant du mode de répartition de la matière, ce qui est une ineptie dans toute théorie qui refuse la donnée d'un espace absolu au sens de Newton. La difficulté est inextricable et tient à ce qu'on essaie à tout prix de donner un sens *physique* à une transformation ϕ qui n'a d'abord de sens que *mathématique* comme changement de coordonnées.

Une autre solution serait de supposer que nous nous plaçons dans un cas idéal où il n'y a pas de matière en dehors de la boule d'argile elle-même. On se retrouve donc exactement dans la configuration inverse de celle de l'argument du trou originel d'Einstein, où il y avait de la matière partout sauf dans la portion d'espace considérée. Le cas devient plus simple dans la mesure où il n'y a alors que la matière de la boule d'argile elle-même qui puisse influencer la métrique.

Dans un monde aux lois simplifiées comme celui de l'expérience de pensée de Weyl, où la vitesse finie d'interaction est négligée, et où les valeurs du champ métrique sont parfaitement déterminées par la matière réduite à un champ scalaire ρ, alors la métrique se réajusterait parfaitement et instantanément conformément à la nouvelle distribution de matière, pour laisser en permanence la forme du morceau d'argile intacte. La forme sphérique persisterait à chaque instant. On aurait un cosmos, pour ainsi dire éléatique, où tout changement (de forme) serait impossible.

Mais ce n'est pas le cas dans la théorie de la relativité générale. D'une part, du fait de la vitesse finie d'interaction, la modification de la métrique due à un réajustement de la matière à un endroit de la boule d'argile n'influe pas « instantanément » ailleurs. D'autre part, et le problème est plus sérieux, comme nous l'indiquons dans l'autre annexe, le principe de Riemann-Mach dans son sens fort (détermination complète de la métrique par le champ décrivant la répartition de la matière) n'est pas vérifiée dans la théorie d'Einstein. Le champ métrique n'est pas entièrement déterminé par la répartition de la matière, mais seulement son tenseur d'Einstein. Une déformation de la boule d'argile est donc encore pensable dans le cadre de la théorie, même si elle est seule dans l'univers.

En revenant à présent au cas où il y a de la matière en dehors de la boule d'argile, et en n'utilisant que des difféomorphismes qui se réduisent à l'identité en dehors de la région d'espace contenant la boule d'argile, le raisonnement ci-dessus tient toujours. C'est-à-dire que, finalement, c'est parce que, dans la théorie d'Einstein, le principe de Riemann-Mach dans son sens fort est remplacé par un principe plus faible qui pose une interaction entre la matière et un espace-temps qui possède une forme d'indépendance et d'« inertie » propre à l'égard de la matière, qu'une évolution dynamique de la métrique globale de l'Univers est finalement pensable. On ne peut finalement penser la relation entre la matière et l'espace-temps sous le modèle de la détermination du champ métrique par des fonctions scalaires sur la variété spatio-temporelle, censées représenter la matière antérieurement à toutes ses déterminations métriques. Cela se perçoit d'autant mieux si on passe de l'hypothèse simplificatrice de Weyl (qui modélise la matière par un champ scalaire ρ) aux équations proprement dites d'Einstein. Dans ces dernières équations, la matière intervient à travers le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ qui a déjà une dimension métrique, puisqu'aussi bien la notion de densité de matière que celle d'impulsion réfèrent déjà à une matière perçue dans son rapport à la métrique.

Partie IV Un idéalisme à la sphère d'influence limitée : l'Epistémologie de la Nahegeometrie

1. Les fondements épistémologiques de la Nahegeometrie : l'infinitésimal comme domaine d'influence légitime de la raison

a. Déplacement de l'*a priori* dans la géométrie de type riemannien

Notre troisième partie a démontré comment le caractère dynamique des relations métriques, l'idée révolutionnaire de la théorie de la relativité générale, posait des problèmes à une épistémologie de la géométrie comme celle d'Hermann Weyl qui, héritière à la fois de la pensée de l'idéalisme allemand et de la vision algébrique (groupe de transformations) de l'espace, insistait sur la notion d'homogénéité comme une condition *a priori* de l'objectivité géométrique.

Le caractère dynamique de la métrique dans la théorie d'Einstein impose une géométrie du même type que les espaces de Riemann ; géométrie différentielle des espaces courbes qui viole l'homogénéité de l'espace, du moins telle qu'elle était conçue traditionnellement dans la continuité de la pensée de Felix Klein. Les points de l'espace d'Einstein, comme ceux d'un espace de Riemann en général, ne sont pas métriquement équivalents au sens où il n'y a pas en général d'isométrie de l'espace(-temps) dans lui-même qui envoie n'importe quel point de l'espace sur n'importe quel autre. Cette tension entre la notion d'espace comme forme homogène, et l'hétérogénéité des relations métriques dans la physique d'Einstein éclate avec la plus grande acuité dans les paragraphes 11 et 12 de la 3ème édition d'*Espace-Temps-Matière* que nous avons commentés. Cette tension est résolue provisoirement, lors du passage que nous avons appelé « l'argument de la boule d'argile », par une prise de position radicale. Si la métrique d'Einstein n'est pas homogène, c'est qu'elle n'a pas un caractère proprement spatial. L'espace n'a par lui-même que des propriétés topologiques, et il accueille ensuite en lui la métrique dynamique qui a un caractère physique comme la matière qui la détermine.

Tant qu'on en reste à cette première approximation des rapports entre le mathématique et le physique dans le nouveau cadre de la géométrie de Riemann-Einstein, la seule forme d'idéalisme transcendantal encore défendable, dans le sens d'une doctrine épistémologique où la raison impose *a priori* à la science physique un espace homogène dont la structure repose sur ses exigences propres, ne peut être qu'un idéalisme transcendantal de l'espace *comme variété topologique (ou différentiable)*. Les propriétés topologiques pourraient être fixées *a priori* par des exigences de la raison comme condition de possibilité de toute mesure physique objective, tandis que la métrique serait complètement abandonnée à l'empirie, domaine de la physique.

A la fin de notre partie précédente, nous avons donné des arguments qui montrent en quoi cette position épistémologique radicale, même si elle touche adéquatement à certains traits majeurs et irrévocables de la théorie de la relativité générale, n'était pas pleinement satisfaisante. Le sens mathématique d'Hermann Weyl, sa forte tendance rationaliste, ainsi que sa connaissance de l'histoire des sciences, ne pouvaient sans doute que le rendre insatisfait vis-à-vis d'une position qui exclurait totalement les considérations métriques de la notion d'espace comme forme des apparences, ôtant à la raison toute prétention à pouvoir légiférer en ce domaine. La prudence d'Hermann Weyl quand il interprète son « argument de la boule d'argile » est visible à travers la façon dont il en exprime les conséquences. Il ne dit pas aussi franchement que nous l'avons laissé d'abord penser que la métrique serait tout à fait exclue du concept d'espace comme forme des apparences. Il dit plutôt que les relations métriques ne relèvent pas de l'espace *en soi* mais de l'espace *dans sa relation à la matière*. Certes, la pensée d'une telle relation entre un élément idéel (l'espace comme forme des apparences) et une réalité physique (la matière) est problématique. Cependant, cette formulation prudente pointe vers une vérité épistémologique importante : l'intervention nouvelle de la réalité physique pour déterminer les coefficients de la métrique, dans une géométrie de type riemannien, n'a pas supprimé toute composante *a priori* dans la construction des concepts métriques. Comme nous l'évoquions en introduction, l'*a priori* n'a pas disparu, il s'est simplement déplacé.

En effet, à coté des hypothèses rationnelles extra-métriques, comme la supposition du caractère continu et différentiable de la variété spatio-temporelle, il y a également des hypothèses *a priori* de nature métrique qui servent de support à la mesure physique des coefficients g_{ab}. Le fait que les coefficients « $g_{ab}(x^{\mu})$ » de la métrique soit déterminés empiriquement dans une géométrie de type riemannien ne doit pas nous ôter de l'esprit que la notion même d'espace de Riemann, la notion de forme quadratique différentielle, est une construction rationnelle qui précède toute mesure et la rend possible. En ce sens, les notions mathématiques fondamentales qui constituent la géométrie différentielle servent de condition de possibilité à la mesure physique, qu'il s'agisse de la mesure des objets contenus dans l'espace, ou de la mesure de l'« espace » lui-même, au sens où nous en avons parlé à propos du deuxième type de mesure effectué par Gauss.

Certes, la notion de métrique comme forme quadratique n'est pas plus primitive chez Riemann que chez Hermann Weyl, dans la mesure où les deux auteurs sont à la recherche de justifications au fait qu'on choisisse de munir l'espace avec ce type de métrique. L'important ici est que les hypothèses primitives qui servent à cette justification ne sont pas de nature empirique, comme nous l'avons déjà vu à propos de la justification de Riemann.

Il reste à savoir : 1) comment se fait ce nouveau partage entre les composantes mathématiques *a priori* et les composantes physiques empiriques qui co-constituent le champ des relations métriques dans une géométrie de type riemannien, et 2) comment ce nouveau partage des rôles est justifié épistémologiquement. Hermann Weyl va trouver encore chez Bernhard Riemann la source de sa réflexion pour répondre à ces deux questions épistémologiques capitales pour la compréhension de la géométrie différentielle.

b. La distinction proche/lointain comme frontière entre le mathématique et le physique dans la nouvelle géométrie

Répondons tout de suite à la première des questions posées ci-dessus. Dans la nouvelle géométrie, celle qui accepte le point de départ riemannien, Hermann Weyl détermine la frontière entre la sphère mathématique, lieu où la raison peut légiférer, et la sphère physique, où le rapport à l'expérience est requis, à l'aide de la distinction entre les relations infinitésimalement proche[Nahe] et les relations à distance finie [Fern].

Quitte à généraliser notre propos par la suite, illustrons ce que cela signifie sur l'exemple le plus classique : celui des espaces de Riemann. Nous supposerons que, pour décrire notre espace, nous nous sommes placés dans un système de coordonnées. Nous nous permettons ici l'abus de langage qui consiste à confondre un objet géométrique avec sa représentation dans le système de coordonnées choisi. Nous modernisons quelque peu le vocabulaire et les notations employées sans que cela ne trahisse, selon nous, les idées d'Hermann Weyl.

Un espace de Riemann est une variété différentiable de dimension *n*, que nous noterons « V_n », pour laquelle il existe en chacun de ses points (x_0) une forme quadratique différentielle $g_{\mu\nu}(x_0)$, définie positive, qui opère sur les éléments linéaires *dx* définis *à partir de ce point*. Cette forme quadratique définit la longueur de l'élément linéaire $dx(x_0)$ selon la formule classique :

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}.$$

Tous les espaces T_{x_0} tangents à la variété sont structurés de la même façon, quel que soit le point x_0. Cette identité de structure peut être mise en évidence comme suit. Par l'intermédiaire d'un changement de coordonnée, on peut ramener l'expression de la forme quadratique, *en un point donné*, à la forme euclidienne canonique :

$$dl^2=\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \ (\delta_{\mu\nu}=1 \text{ si } \mu=\nu, 0 \text{ sinon}).$$

Ainsi, dans un espace de Riemann, tous les espaces tangents, pris isolément, ne peuvent être distingués les uns des autres. Ils sont tous munis d'une structure qui n'est autre que celle d'un espace euclidien[230].

La longueur d'une courbe s'obtient comme il est bien connu par intégration des longueurs éléments linéaires successifs composant la courbe. Si la courbe est paramétrée par :

$$x^\mu(\lambda) \qquad \lambda \in [0, 1],$$

sa longueur sera :

$$l = \int_0^1 \sqrt{g_{\mu\nu}\big(x(\lambda)\big)\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda.$$

D'une manière générale, toutes les propriétés métriques (longueurs, aires, volume, courbure…) d'un objet de taille finie (par opposition à « infiniment petit ») sont obtenues par composition et intégration des données métriques *locales* immédiatement données par les coefficients $g_{\mu\nu}(x)$ de la métrique en chaque point.

Alors que la structure des relations métriques *locales* est entièrement déterminée *a priori* par la supposition de l'existence d'une forme quadratique différentielle, les relations à *distance finie* dépendent de façon contingente de la façon dont les structures métriques locales, toutes euclidiennes, sont connectées[231] les unes aux autres pour former l'espace complet. Dans le cas qui nous occupe, celui d'un espace de Riemann, c'est la donnée dans un système de coordonnées des fonctions $g_{\mu\nu}(x)$ qui nous permet de savoir quelles sont les

---

[230] C'est-à-dire d'un vectoriel de dimension fini muni d'une forme quadratique définie positive.

[231] Nous laissons pour le moment volontairement dans le vague cette notion de connexion qui prendra plus tard le sens mathématique précis de l'unique connexion affine compatible avec la métrique riemannienne choisie.

relations métriques possibles à distance finie. Ainsi, pour prendre un exemple simple et connu, le rapport entre la circonférence d'un « cercle »[232] de dimension finie et son diamètre est variable en général d'un point à un autre d'un espace de Riemann de dimension 2. Ce n'est que lorsque le diamètre de notre cercle tend vers 0 que le rapport tend vers π, indépendamment du point où notre cercle se trouve, et indépendamment de l'espace de Riemann choisi. C'est en effet alors seulement la structure locale de l'espace, par nature euclidienne, qui détermine ce rapport.

La différence de statut entre les relations métriques prochaines [Nahe] et les relations à distance finie [Fern] est clairement lisible dans les textes originels qui ont marqué la naissance de la géométrie différentielle. Souvenons-nous du texte sur la géométrie intrinsèque des surfaces courbes de C.F. Gauss. On commençait par considérer une surface plongée dans un espace ambiant tridimensionnel euclidien. On se permettait de déplacer la surface et de la plier (courbure extrinsèque) à volonté au sein de l'espace ambiant, pourvu que la surface ne subisse dans cette opération aucun déchirement ni aucune distorsion. Or, cette absence de distorsion signifiait mathématiquement que l'on se permettait de modifier la distance (extrinsèque) entre deux points de la surface à distance finie, mais non pas entre deux points « infiniment proches ». Ainsi, la distance extrinsèque entre deux points à distance finie de notre surface n'était pas un invariant de notre géométrie. En revanche, la distance entre deux points infinitésimalement proches[233], i.e. la longueur d'un l'élément linéaire (dx), était bien un tel invariant. Le seul moyen de définir une notion de distance intrinsèque entre deux points à distance finie est d'intégrer les éléments linéaires qui composent les chemins sur la surface reliant les deux points. Les relations métriques à distance finie sont donc dérivées des relations primitives que sont les relations métriques infinitésimales, et cette dérivation est dépendante de la surface considérée.

Riemann avait pris acte de ce caractère primitif des relations métriques *infinitésimales* quand il s'était débarrassé de la supposition d'un espace euclidien ambiant en définissant dès le départ une surface (ou plus généralement un espace de Riemann *n*-dimensionnel) par la donnée intrinsèque de la forme quadratique différentielle *localisée* en chaque point de la surface. On comprend maintenant pourquoi, si on accepte les deux

[232] Il faut comprendre ici par « cercle », dans un espace de Riemann de dimension 2, une courbe fermée formée de tous les points situé à une distance fixée « r » d'un point O de l'espace (le centre). La notion de distance employée est la longueur de la géodésique reliant le centre aux points de la circonférence. Pour éviter une complexité inutile, on suppose qu'on s'est placé sur un voisinage suffisamment petit autour du centre pour qu'il y ait une seule géodésique qui relie ce centre à chaque point. La longueur de la circonférence du cercle se calcule bien sûr en intégrant la longueur de tous les éléments linéaires composant la circonférence. On appelle ici « diamètre » le nombre 2*r.

[233] On peut la considérer indifféremment comme intrinsèque ou extrinsèque puisque la distance sur la surface est induite de la métrique de l'espace ambiant.

hypothèses fondamentales de la géométrie riemannienne de la p151, c'est dans les structures *à distance finie*, par opposition aux structures infinitésimales, que la matière et les lois physiques ont leur rôle à jouer. Mais avant de rentrer dans la partie proprement physique du problème, il nous faut voir comment ces idées particulières de Riemann peuvent être généralisées à une famille de géométries : les géométries qu'Hermann Weyl appelle « de proximité » [Nahegeometrie].

c. Les idées de « Nahegeometrie » et d'« Infinitesimalgeometrie » comme nouveau cadre unificateur de la géométrie

Toutes les propriétés que nous venons d'illustrer font des espaces de Riemann un cas particulier, le premier apparu dans l'histoire de la géométrie, de ce qu'Hermann Weyl appelle une « géométrie de proximité » [Nahegeometrie] ou parfois plutôt une « géométrie infinitésimale » [Infinitesimalgeometrie]

Il ne faut pas interpréter « géométrie de proximité » au sens où il n'y aurait aucune structure spatiale à distance finie, mais au sens où seules les notions métriques locales sont une donnée primitive dont les notions métriques globales sont dérivées par intégration. Cette intégration doit tenir compte de la façon dont ces espaces infinitésimaux sont connectés les uns aux autre pour former l'espace entier. La liberté accordée à la façon dont ses espaces infinitésimaux se raccordent entre eux est telle que la géométrie globale de l'espace ne dérive pas de manière univoque de la géométrie locale. En particulier, il n'est pas nécessaire que la structure globale soit similaire aux structures infinitésimales. Par exemple, il n'est pas possible en général de trouver un système de coordonnées tel que la métrique d'un espace de Riemann s'exprime sous la forme euclidienne $g_{\mu\nu}=\delta_{\mu\nu}$ ($\delta_{\mu\nu}$=1 si μ=ν, 0 sinon) *en tout point*.

C'est dans la multiplicité infinie des façons dont les « raccords » des espaces infinitésimaux entre eux peuvent se faire que réside la multiplicité des instances possibles d'une même Nahegeometrie. Cette « flexibilité », cette liberté laissée dans la façon de connecter entre eux les espaces infinitésimaux, est ce qui fait défaut aux géométries qu'Hermann Weyl, par opposition, appelle « géométrie du lointain » [Ferngeometrie]. Dans ce dernier type de géométrie, ce ne sont pas les espaces infinitésimaux, les structures locales, qui sont primitives ; mais on se donne directement la structure globale qui régit l'espace dans son ensemble. Dans le cas particulier de la géométrie euclidienne, modèle type d'une Ferngeometrie, les relations à distance finie sont similaires, à leur échelle, aux relations infinitésimales. En effet, l'espace complet est muni d'une forme quadratique :

$$l^2 = \delta_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu},$$

similaire aux formes quadratiques différentielles :

$$dl^2 = \delta_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu,$$

dont sont munis les espaces locaux (espaces tangents). Hermann Weyl qualifie de « rigide » ces géométries dans la mesure où la liberté de raccord dont nous avons parlé n'est plus accordée.

On peut parler d'« homogénéité » à propos de l'espace euclidien dans un sens qui n'a pas encore été rencontré. C'est l'homogénéité au sens où une seule et même structure se retrouve à l'identique quelle que soit l'échelle à laquelle on se place. C'est le sens d'homogénéité qui conviendrait par exemple pour parler d'objets mathématiques comme les fractales.

Pour comprendre d'une manière globale toutes les Ferngeometrie contre lesquelles Hermann Weyl construit sa notion de Nahegeometrie, ce n'est pas cette notion d'homogénéité qui est la plus utile mais bien celle que nous avions rencontrée ci-dessus en parlant des géométries de type kleinien. Nous avons vu que, dans un espace de Klein, il y a homogénéité au sens où le groupe des transformations de l'espace opère transitivement sur les points. Ainsi chaque point est équivalent à un autre. Mais ici, contrairement au cas de la Nahegeometrie, chaque point est équivalent aux autres non seulement relativement aux relations locales qui structurent son *voisinage infinitésimal*, mais aussi comme point de vue *sur la structure globale de l'espace*. En effet, les transformations en jeu dans la définition des espaces de Klein sont bien les transformations globales qui agissent sur la totalité de l'espace. Ainsi, derrière la dénomination nouvelle de « Ferngeometrie », Hermann Weyl s'attaque en fait à toute géométrie qui se construit selon le modèle des espaces de Klein. Parmi le foisonnement des géométries développées au XIX^{ème} siècle, seule la géométrie de Riemann échappe à cette qualification d'être la science d'un « espace rigide ».

Dans le paragraphe où nous avons traité des espaces de Klein, nous avons vu que sa notion d'homogénéité permettait d'unifier sous un concept commun la (quasi)-totalité des géométries du XIX^{ème} siècle, à l'exclusion précisément de la géométrie différentielle de Gauss-Riemann. Cette unification était transversale ; l'idée d'un groupe de transformation homogène pouvant opérer aussi bien dans la strate métrique que dans les strates affines ou projectives. En se plaçant du côté de Bernhard Riemann pour s'attaquer à la conception kleinienne[234] de la géométrie, Hermann Weyl va proposer le concept unificateur et

[234] Nous ne voulons pas dire qu'Hermann Weyl cible spécifiquement la pensée de Felix Klein. Il s'attaque à une conception de la géométrie qui s'est construite tout au long du dix-neuvième siècle en réfléchissant sur l'espace

transversal de Nahegeometrie pour penser l'ensemble de la géométrie. Nous avons illustré cette notion sur l'exemple *métrique* des espaces de Riemann, mais l'idée d'un espace composé par le libre raccord d'espaces infinitésimaux tous identiques se conçoit aussi bien pour les autres strates usuelles, affines et conformes, de la géométrie. On doit ainsi imaginer une Nahegeometrie comme une famille d'espaces, concernant une strate donnée, et ayant en commun d'être tous composés à partir d'une structure locale, infinitésimale, qui se répète en tout point de la variété. Nous attendrons la partie suivante (IV.2) pour développer comment Hermann Weyl a participé à étendre à toutes les strates ce schéma général de la Nahegeometrie.

Terminons ce paragraphe en expliquant comment il faut comprendre le terme de « géométrie infinitésimale » qu'Hermann Weyl préfère parfois à celui de « géométrie de proximité ». Dans une Ferngeometrie, le calcul infinitésimal est tout aussi bien concevable que dans une Nahegeometrie, puisque le calcul infinitésimal est né dans le cadre de la géométrie euclidienne classique. Ce n'est donc pas de cela qu'il s'agit. La Nahegeometrie est qualifiée de « géométrie infinitésimale » non pas parce que les objets contenus dans l'espace (les courbes, les surfaces…) ont des mesures qui ne peuvent être connues que par le biais du calcul intégral, mais parce que l'*espace lui-même* possède des structures (affine, métrique…) qui ne sont constructibles que par intégration de structures infinitésimales.

En même temps qu'un nouveau cadre général pour penser de manière unifiée la géométrie, on comprend que le concept de Nahegeometrie fournit à Hermann Weyl la réponse à la première question que nous avons posée ci-dessus p181. C'est dans l'articulation entre le domaine de l'infiniment petit [Nahe] et le domaine du finiment éloigné [Fern] que va se trouver la frontière entre le mathématique et le physique, dans toute construction de l'espace de type riemannien. C'est uniquement dans le domaine infinitésimal que vont pouvoir se rencontrer les composantes *a priori* du concept d'espace fondées sur des exigences rationnelles du sujet, tandis que le domaine du finiment éloigné est laissé sous la juridiction de la matière et de ses lois à découvrir empiriquement.

Nous allons voir comment Weyl justifie épistémologiquement ce partage des tâches (c'est-à-dire comment il répond à la deuxième question de la p181) avant d'exposer comment il est parvenu à reconstruire l'ensemble de la géométrie et de la réflexion épistémologique sur la notion d'espace à partir de ce programme unificateur de la Nahegeometrie.

---

euclidien millénaire et sur les nouveaux espaces (projectif, elliptique, hyperbolique…) apparus du XVI^{ème} au XIX^{ème} ; conception qui a trouvé sa formulation la plus claire et générale dans la pensée de Felix Klein. La portée de ces travaux était telle qu'on pouvait déjà considérer les idées du programme d'Erlangen comme des idées communes du milieu scientifique, surtout à Göttingen.

d. Justification de l'épistémologie de la Nahegeometrie par le caractère local du sujet

Selon Hermann Weyl, la frontière au sein de la notion d'espace, entre le domaine où la raison mathématique peut imposer légitimement ses exigences et le domaine où les relations dépendent des lois physiques d'interaction, se situe entre la sphère des relations de proximité [Nahe] et la sphère des relations à distance finie [Fern]. La justification épistémologique de l'emplacement de cette frontière se trouve dans une certaine compréhension de la nature du sujet qui a déjà été entrevue à l'occasion de nos parties II. et III.

Nous avons vu comment, chez Hermann Weyl, le sujet était compris comme un point de vue ponctuel sur le monde. Il est essentiellement localisé en un point, ce qui s'était traduit en mathématique par l'identification entre le sujet et l'origine du système de coordonnées et en physique par la modélisation du sujet sous la forme d'un « œil ponctuel ».

L'insistance d'Hermann Weyl sur le caractère mystérieux de la conscience montre bien qu'Hermann Weyl n'est en aucun cas un philosophe naïvement matérialiste. Sa notion de sujet comporte une partie spirituelle irréductible au rapport à la matière. Malgré cela, dès que l'enjeu est la construction par le sujet de la notion d'espace, on ne peut faire abstraction du fait qu'il est un être incarné qui n'a d'accès à la réalité extérieure que par l'intermédiaire de ses sens et donc de son corps qui participe de la nature physique. C'est cette incarnation autant que le mystère de la conscience que représente la figure de l'œil-observateur dans le paragraphe 12 d'*Espace-Temps-Matière*. Dans un monde physique où toute interaction est essentiellement localisée et ne se fait que « de proche en proche », le sujet n'a accès qu'à son environnement immédiatement proche par l'entremise de son corps. Si, conformément à ce que nous suggère la tradition idéaliste, la raison est une faculté capable d'imposer *a priori* la forme de notre rapport au monde, cela ne peut pour Hermann Weyl être légitime que dans la sphère des relations de proximité qui est la seule auquel le sujet soit rattaché immédiatement de par son incarnation dans un corps essentiellement localisé.

C'est le point capital sur lequel Hermann Weyl souhaite se démarquer de la philosophie d'Immanuel Kant. Ce dernier, en associant l'espace euclidien sur lequel s'appuie la physique newtonienne à sa doctrine de l'idéalisme transcendantal, a commis le type d'erreur qu'il dénonce souvent lui-même. Il a autorisé la raison à légiférer hors de l'unique domaine qui appartient en propre au sujet et où la raison peut « imposer ses exigences » légitimement : la sphère des relations infinitésimales. Parce qu'Hermann Weyl pense, contrairement en particulier à l'école néokantienne de Marbourg, que la doctrine d'Immanuel Kant est indissociable de la géométrie euclidienne, il se pose dans une position de rejet de la doctrine kantienne de l'espace. Baser sa compréhension épistémologique des sciences de l'espace sur le postulat qu'une Ferngeometrie comme celle d'Euclide est adéquate pour faire de la physique, c'est admettre, sans justification possible, que la raison puisse imposer à toute l'étendue du cosmos une certaine structure rigide immuable, celle qu'Hermann Weyl représentait d'une manière imagée par l'alignement des casernes d'un camp militaire. L'idéalisme transcendantal de Kant avait proposé qu'on ne pense pas le sujet comme un être immergé dans un espace dont la réalité serait indépendante de la sienne, et qu'il essaierait de connaître par expérience. Si tel était le cas, il n'y aurait pas de vérité géométrique nécessaire, donc pas de géométrie comme discipline mathématique mais seulement comme théorie physique révisable. Ce n'était manifestement pas le cas pour Immanuel Kant. A la place d'un *sujet dans l'espace*, Kant nous proposait de penser que *l'espace était constitué par le sujet*, comme un cadre *a priori* imposé par les facultés de la raison comme une condition de possibilité de tout rapport à un objet d'expérience.

La forme d'idéalisme que semble défendre Hermann Weyl est en un sens plus complexe et plus modérée. Il conserve l'idée que l'espace est une *forme des apparences* ou une *forme de notre intuition*. Cela semble signifier pour lui que ce qui est intersubjectif dans la notion d'espace n'est pas objet d'une expérience mais est une construction rationnelle (de nature mathématique) que le sujet impose à la réalité pour pouvoir l'appréhender. Mais, parce que le sujet occupe dans le monde une place ponctuelle et qu'il n'a immédiatement accès qu'à son environnement direct, il n'a de légitimité de poser *a priori* des structures qui fondent son futur rapport au monde par le biais de la mesure, uniquement pour les relations infinitésimales [Nahe]. Ainsi, tout se passe comme si, antérieurement à l'espace comme forme des apparences, qui est une construction de la raison, se tenait une vérité, disons de nature « topologique », sur laquelle la raison n'a pas de prise : le fait que tout objet (et le corps par l'entremise duquel le sujet construit sa notion d'espace en est un) est essentiellement localisé, qu'il na d'accès immédiat qu'à un certain domaine de l'être qui est son voisinage.

A ce niveau de l'analyse épistémologique, il semble qu'on ait affaire à une forme de solipsisme, chaque sujet étant de nature irréductiblement locale et transportant avec lui son propre espace qui n'a de sens que pour son voisinage immédiat. Pour sortir de ce solipsisme, il faut comprendre que la raison qui légifère dans la sphère infinitésimale n'impose pas seulement la structure de l'espace local, mais aussi le mode général selon lequel chaque espace local est connecté aux espaces locaux de son voisinage infinitésimal. Pour fixer les idées, si on prend un point de vue surplombant, intersubjectif, on peut imaginer l'espace global comme étant une sorte de toile en patchwork, composée de petits morceaux de tissus tous identiques (les espaces infinitésimaux), chaque morceau de tissu étant relié à ses voisins par une couture (la connexion) qui est elle-même similaire en tout point.

Le point crucial est que ce mode de connexion qui, comme la structure spatiale locale, fait encore partie de la sphère infinitésimale où la raison peut imposer ses exigences légitimement, ne suffit pas à déterminer la structure globale de l'espace. Tout ce que la raison peut imposer dans le passage d'un espace infinitésimal à son voisin c'est un principe de continuité, qu'Hermann Weyl considère comme un lointain héritier du principe de continuité leibnizien, qui impose que l'on passe d'une structure infinitésimale à sa voisine sans changement brutal. Pour reprendre notre image de l'espace comme « patchwork », on peut imaginer l'indétermination partielle des structures à distance finie, une fois que la raison a imposé la structure infinitésimale et son principe de continuité, comme la possibilité pour le tissu dans sa globalité de prendre une forme quelconque, en orientant différemment les uns par rapports aux autres les petits morceaux de tissus qui le composent. Le principe de continuité impose seulement que ce « changement d'orientation » se fasse de manière infinitésimale dans le passage d'un espace infinitésimal à son voisin. Il n'y a pas d'arête, pas de points singuliers dans la trame de notre tissu.

Dès que l'on souhaite connaître la structure des relations (affine, métrique…) à distance *finie*, on est dans un rapport à quelque chose d'irréductiblement extérieur au sujet, car non local, et le rapport à l'expérience est alors requis. Conformément à ce que nous avons développé ci-dessus, la place vacante que vient remplir ce rapport à l'expérience est la détermination de l'orientation mutuelle[235] que prennent les espaces infinitésimaux les uns par rapports aux autres.

Nous avions développé dans le paragraphe III.2.b., comment l'analyse de Riemann l'avait poussé à faire appel à l'expérience pour venir déterminer les valeurs $g_{\mu\nu}$ de la métrique dont la nature avait été imposée *a priori*. L'analyse épistémologique d'Hermann Weyl ne fait donc que poursuivre en la généralisant l'analyse de Riemann. Les espaces de Riemann ne sont pas pour Weyl la structure métrique la plus générale que la raison mathématique est susceptible de développer en respectant ses propres exigences d'homogénéité et de continuité. Mais l'analyse épistémologique riemannienne avait cependant touché juste en montrant que la raison ne pouvait imposer *a priori* que la forme

[235] On verra plus bas, avec les « espaces de Weyl », qu'il faut prendre ici l'idée d'un « changement d'orientation » en un sens abstrait qui ne comprend pas seulement ce qu'on appelle habituellement orientation, et qui est une notion en rapport avec la notion de direction et d'angle, mais aussi une sorte de « changement d'orientation métrique » qui exprime comment la notion de longueur évolue progressivement quand on passe d'un espace local à son voisin. Pour une surface courbe plongée dans un espace euclidien tridimensionnel, la courbure de Gauss est une mesure de la rapidité avec laquelle le vecteur normal à la surface change d'orientation (angle) quand on s'éloigne du point où la mesure est effectuée. C'est donc bien une mesure ayant trait au changement d'orientation angulaire des espaces tangents les uns par rapports aux autres. Dans un espace de Weyl de dimension 2, en plus de ce changement d'orientation angulaire, il faudra se donner une sorte de changement d'orientation métrique par le biais de la « courbure métrique ».

générale de la métrique mais non pas la valeur particulière des coefficients qui la détermine. On peut voir la position d'Hermann Weyl que nous avons esquissée comme un affinage de l'analyse épistémologique de Riemann qui montre que la différence épistémologique entre la *nature de la métrique*, qui détermine *a priori* les relations métriques infinitésimales, et les relations métriques à distance finies, déterminées par le jeu des interactions de la matière, est justifiée par une analyse du sujet et de sa nature essentiellement locale.

Cette analyse permet de préciser en quel sens Hermann Weyl fait partie de la famille des penseurs idéalistes de la théorie de la relativité. On pourrait qualifier son idéalisme d'un « idéalisme transcendantal des relations de mesures infinitésimales », en comprenant bien que ce n'est pas seulement la structure d'un espace infinitésimal « sans rapport à ses voisins » qui est perçue comme étant imposée *a priori* par la raison, mais aussi le mode de connexion d'un espace infinitésimal à l'autre. La rupture principale par rapport au kantisme tient donc à une limitation de la sphère d'application légitime de la raison dans la construction du concept d'espace. Mais au sein de la sphère où la raison peut imposer légitimement ses exigences, l'idéalisme d'Hermann Weyl est plutôt radical puisque toutes ses recherches sur la nature de la métrique et du mode de connexion des espaces infinitésimaux tendent idéalement à vouloir imposer une structure unique fondée exclusivement sur les exigences de la raison.

Les problèmes d'interprétation quant à la forme d'idéalisme défendue par Hermann Weyl sont multiples et proviennent en grande partie du fait qu'Hermann Weyl n'a pas écrit de texte où il aurait exposé exhaustivement sa conception du sujet, de ses diverses facultés, et de la place exacte que le sujet occupe dans la constitution du concept d'espace. Sans doute, ce manque est une conséquence du rapport particulier qu'entretient Hermann Weyl avec la philosophie. Il n'essaie pas reconstruire une nouvelle doctrine idéaliste mais se sert de ses lectures idéalistes pour lui fournir des idées directrices qu'il adapte pour interpréter la science de son époque. Aussi légitime que soit cette attitude, les problèmes qu'elle pose pour une interprétation correcte de l'idéalisme d'Hermann Weyl n'en sont pas moins réels. Tous les traits que nous avons développés ci-dessus nous semblent les plus clairs au vu des diverses remarques éparses dans *Espace-Temps-Matière*. Selon nous, la principale difficulté qui subsiste consiste à comprendre les rôles respectifs qu'Hermann Weyl attribue à la sensibilité et à l'entendement, à l'intuition et au concept, dans la détermination de cet espace comme forme de notre intuition qui opère dans le domaine infinitésimal.

La majorité des textes d'*Espace-Temps-Matière* laissent à penser que les éléments rationnels sur lesquelles sont fondés l'espace comme forme, la structure infinitésimale des relations de mesures, ne proviennent pas *d'intuitions sensibles* inhérentes à la nature de notre sensibilité, mais plutôt de l'ordre d'une *construction conceptuelle* fondée sur des notions comme la congruence, l'homogénéité et la continuité. L'*analyse mathématique du problème de l'espace* qui clôt la période de rédaction d'*Espace-Temps-Matière* est le modèle d'une telle analyse conceptuelle qui justifie la forme *a priori* de l'espace (dans ses structures infinitésimales) par un travail mathématique cherchant à imposer la forme générale de la métrique en montrant qu'elle est la seule compatible avec les grands principes *a priori* que sont l'homogénéité, la continuité et le principe de liberté.

Cependant, d'autres textes d'Hermann Weyl laissent à penser au contraire, dans une perspective plus kantienne, que cette forme *a priori* qu'est l'espace dans ses structures infinitésimales reposerait sur des intuitions sensibles irréductibles à du concept pur. L'appellation de « forme de notre intuition » qu'Hermann Weyl emploie parfois à la place du plus courant chez lui « forme des apparences », va dans ce sens. Certains textes semblent affirmer que la structure euclidienne locale des Nahegeometrie qu'acceptent Riemann et Weyl a été choisie parce qu'elle correspondrait à une certain forme que le sujet perceptif perçoit immédiatement par le biais d'intuitions sensibles. Enfin, le rattachement pendant une année d'Hermann Weyl à la pensée de Brouwer, peut être interprété comme une volonté pour Hermann Weyl de justifier les fondements de sa Nahegeometrie en resserrant les liens entre les mathématiques qui décrivent les structures infinitésimales et les propriétés intuitives de la perception. La mise à l'écart provisoire du problème philosophique de l'espace, a avoir sans doute avec cette zone de flou autour du rôle de l'intuition dans les fondements de la Nahegeometrie.

Nous pensons qu'il n'est pas possible de trancher entre ces deux lectures d'Hermann Weyl dans *Espace-Temps-Matière.* Sans doute, la juxtaposition dans le texte de ces deux types de discours est le signe d'une problématique qui s'est posée à Hermann Weyl mais pour laquelle il ne s'est jamais prononcé définitivement. Une chose nous semble parfaitement claire dans son texte : la place prédominante des éléments *a priori* dans la détermination des relations de mesure infinitésimales. Mais la clarification de ce qui a trait à l'intuition et ce qui a trait à la construction conceptuelle au sein de ces éléments *a priori* est toujours en attente, ave le problème philosophique de l'espace. Tout ce que nous pouvons faire, en tant que lecteurs d'*Espace-Temps-Matière*, c'est signaler la juxtaposition de ces deux types de discours, et la problématique qu'ouvre inévitablement cette juxtaposition. Enfin, on peut, avec Norman Sieroka, noter que ces deux voies de compréhension de la nature des éléments *a priori* peuvent être perçus comme issus de deux sources d'inspiration philosophique différentes d'Hermann Weyl. La compréhension « passive » des éléments *a priori* comme issus d'une intuition perceptive immédiate serait à mettre au compte d'une influence d'Husserl sur Weyl, tandis que la compréhension « active » des éléments *a priori* comme issus d'une construction conceptuelle serait à mettre au compte d'une influence fichtéenne.

e. La Nahegeometrie comme programme pour les sciences de l'espace et leur épistémologie

Nous espérons avoir convaincu le lecteur que les notions de Nahegeometrie et d'Infinitesimalgeometrie sont les notions clefs pour comprendre l'unité du projet d'Hermann Weyl dans sa période d'investissement dans le problème général de l'espace dans ses dimensions tant mathématique, physique, qu'épistémologique. Derrière le foisonnement des idées qui composent *Espace-Temps-Matière* et les multiples changements de position qui marquent les différentes éditions du texte, on peut saisir une unité programmatique que nous allons présenter ci-dessous sous une forme un peu plus systématique que ne le fait Hermann Weyl. Ce programme de reconstruction des sciences de l'espace, de leur épistémologie, et de leur ontologie, sous la direction de la notion de Nahegeometrie, comporte trois volets :

1) Un volet mathématique :

En vertu de la notion de Nahegeometrie, il s'agira pour Hermann Weyl :

- D'affiner la notion riemannienne de métrique et de parfaire la notion mathématique de connexion pour que toutes les strates de la géométrie puissent être construites les unes après les autres de façon conforme à l'idée de Nahegeometrie. On parvient par ce biais à une *géométrie infinitésimale pure* [Reine Infinitesimalgeometrie].

- De construire mathématiquement une nouvelle notion d'homogénéité conforme à l'idée de Nahegeometrie, qui remplacera la notion kleinienne d'homogénéité pour penser de manière unifiée et transversale l'ensemble de la géométrie.

- De démontrer mathématiquement que la forme générale adoptée par Hermann Weyl pour la métrique et la connexion est la seule compatible avec les principes *a priori* adoptés (homogénéité, continuité, liberté). C'est l'« analyse mathématique du problème de l'espace ».

2) Un volet physique :

Nous avons vu que la Nahegeometrie était fondée sur l'idée du caractère essentiellement localisé du sujet et sur l'idée de construire de proche en proche les relations à distance finie à partir des relations locales. Cette architecture mathématique est en fait le corrélat naturel d'une physique des champs qui ne conçoit les phénomènes naturels qu'à partir d'interactions essentiellement localisées dont les influences ne se propagent qu'à vitesse finie. Le volet physique du programme de la Nahegeometrie comportera donc principalement une réécriture de toutes les grandeurs et lois physiques pour s'adapter à la nouvelle nature de l'espace. Le remplacement des anciennes notions mathématico-physiques non localisées (force, flux, circulation…) par des notions localisées (champ, divergence, rotationnel…) était déjà bien avancé à l'époque des travaux d'Albert Einstein et d'Hermann Weyl. Les outils différentiels mathématiques (divergence, rotationnels…) se mettent en place dès le XVIII^{ème}, tandis que l'idée d'une limitation de la vitesse de toute interaction s'impose progressivement avec la découverte du caractère fini de la vitesse de la lumière, les travaux de Faraday et Maxwell, et le débat sur la dynamique de l'éther et la propagation de la lumière qui se clôt avec la consécration définitive du caractère limité de toute interaction dans la mécanique de la relativité restreinte. Ce qui est plus propre à la Nahegeometrie, et ne fait que prolonger le point de vue de la théorie de la relativité générale, c'est qu'il faut adapter les outils mathématico-physique au fait que ce n'est plus seulement la matière qui a le caractère dynamique d'un champ se propageant à vitesse finie, mais l'espace lui-même, ou plutôt la métrique spatio-temporelle.

La réussite d'Hermann Weyl dans la « purification » de la géométrie infinitésimale (cf. plus bas IV.2.cd), et la plus grande liberté dans la construction des relations métriques permises par les « espaces de Weyl », lui ont donné l'espoir de parvenir à réaliser deux projets qui viennent se greffer naturellement sur le programme de la Nahegeometrie sans en découler d'une manière nécessaire :

(1) Une tentative de réduction ontologique de toutes les entités physiques à la notion de champ dynamique. Nous avons vu dans notre partie III. comment la métrique d'Einstein devenait un champ dynamique au même titre que le champ électromagnétique. Pour parvenir à un monisme ontologique, il fallait encore réduire la notion de matière à celle de champ. Dans les équations d'Einstein, la matière intervenait déjà sous la forme d'un champ dynamique par le biais du tenseur d'énergie-impulsion. Mais cette modélisation « lissée » de la matière par un champ continu de densité ne rend pas compte de la nature « granulaire », « corpusculaire » de la matière observée par ailleurs. Pour pouvoir assumer jusqu'au bout une vision continuiste du monde physique et concevoir chaque portion de matière, y compris les « particules » comme les électrons, comme ayant une nature « fluide », décomposable indéfiniment en éléments plus petit, il fallait pouvoir rendre compte de la stabilité des particules, c'est-à-dire de la possibilité pour une quantité importante d'énergie de se maintenir de manière au moins approximativement stable sous une forme localement condensée, faisant apparaître la répartition de la matière comme granulaire au niveau mésoscopique. Pour tenter de réaliser ce projet explicatif, afin d'atteindre un monisme ontologique des champs dynamiques, Hermann Weyl généralise, pour l'adapter à la théorie d'Einstein, une théorie de Gustav Mie qui avait été produite dans le cadre de la mécanique classique. Cette généralisation d'Hermann Weyl est intégrée à *Espace-Temps-Matière* dans la troisième édition.

(2) Outre cette poursuite du programme de Gustav Mie, *Espace-Temps-Matière* contient, à partir de la troisième édition, une autre théorie physique nouvelle qui est, semble-t-il, la première tentative de l'histoire d'une théorie unifiée des champs. En effet, ontologique, Hermann Weyl avait l'espoir que sa Nahegeometrie fournisse un cadre géométrique suffisamment puissant pour finir de géométriser totalement la physique. Nous avons expliqué, dans notre paragraphe II.1.e., la différence de statut, au sein de la théorie de la relativité générale, entre les lois de la gravitation et les lois de l'électromagnétisme, du point de vue de leur rapport aux structures métriques. Les phénomènes gravitationnels sont de nature géométrique contrairement aux phénomènes électromagnétiques. Hermann Weyl pose l'hypothèse (dès 1918) que la structure d'un espace de Weyl pourrait permettre de géométriser complètement les interactions électromagnétiques aussi bien que gravitationnelles, la nouvelle entité géométrique qu'est la connexion métrique d'un espace de Weyl pouvant jouer le rôle du potentiel électromagnétique.

3) Un volet épistémologique et ontologique :

Nous avons déjà exposé dans notre paragraphe IV.1., en quoi la notion de Nahegeometrie fournissait à Hermann Weyl non seulement un fil directeur pour une compréhension globale et une généralisation de la géométrie mathématique et physique, mais aussi pour fonder une nouvelle épistémologie des sciences de l'espace.

Les réalisations mathématiques et physiques liées au deux premiers volets sont en fait de part en part imprégnées de philosophie que cela soit dans leurs présupposés ou dans leurs conséquences.

Le volet physique est en effet inséparable de questions ontologiques fondamentales sur la nature de la matière du type : la matière n'est-elle qu'une entité secondaire émergeant du champ ou a-t-elle une réalité indépendante ?

Ensuite, les deux derniers pans du volet mathématique, outre qu'ils permettent de penser de manière unifiée les mathématiques, sont indissociables d'un nouveau système épistémologique des mathématiques et de la physique qui peut être résumé comme nous l'avons fait dans le paragraphe IV.1. par l'idée d'un idéalisme transcendantal des relations infinitésimales couplé avec une forme d'empirisme modéré des relations à distances finies. Si l'homogénéité (en quête d'une nouvelle expression mathématique) est toujours aussi primordiale, c'est qu'elle reste le concept essentiel pour comprendre l'objectivité (intersubjectivité) des relations géométriques. Elle a conservé sa fonction épistémique. Enfin, le problème mathématique de l'espace est un problème de fondement des mathématiques qui se présente comme une réalisation concrète du type d'analyse conceptuelle que la raison est légitimée à faire dans la sphère des relations infinitésimales pour imposer la forme adéquate de l'espace comme forme.

2. La reconstruction de la géométrie selon le programme de la Nahegeometrie :

a. L'architecture mathématique générale d'une Nahegeometrie

Les idées 1) d'espaces infinitésimaux similaires, 2) de connexion, et 3) de changements infinitésimaux d'orientation, que nous avons évoquées dans notre description générale de la Nahegeometrie ou Infinitesimalgeometrie, trouvent une expression mathématique tout à fait précise.

D'abord, que ce soit dans la strate affine ou dans la strate métrique, les structures locales reliées à chaque point sont isomorphes. C'est cet isomorphisme qui donne un sens mathématique précis à la similarité de tous les espaces infinitésimaux. Bien qu'ils soient isomorphes, ces espaces sont par eux-mêmes sans liens les uns aux autres. Si on en reste seulement à ces espaces, on est dans une position mathématique correspondant au « solipsisme » dont nous avons parlé plus haut. C'est une *connexion* sur notre espace qui va lier entre eux ces espaces infinitésimaux. La donnée d'une connexion sur l'espace signifie qu'on sait comment « transporter » les éléments[236] d'un espace infinitésimal associé à un point P vers les éléments associés à l'espace infinitésimal d'un point P' infiniment proche. Cela consiste en fait à sélectionner un isomorphisme qui va de l'espace infinitésimal associé au point P vers celui associé à P'. L'image par l'isomorphisme sélectionné d'un élément de l'espace en P, est un élément de l'espace en P' que l'on considérera comme étant en fait le « même élément », déplacé du point P vers le point P'.

[236] Ces éléments varieront bien sûr en fonction de la strate considérée. Pour la strate affine, ces éléments sont les vecteurs. Pour la strate métrique, il s'agit de la longueur associée à chaque vecteur.

A partir de cette connexion qui n'est définie immédiatement et univoquement que pour deux points infiniment proches, on construit la connexion entre deux points P et P' à distance finie par intégration successive des connexions infinitésimales sur un chemin joignant P à P'. La notion de connexion à distance finie ainsi obtenue est en général « non intégrable », c'est-à-dire dépendante du chemin choisi. Si bien que, dans une Nahegeometrie, il n'y a pas *une* isomorphie univoquement déterminée entre deux espaces infinitésimaux *finiment éloignés*, qui nous dise comment on déplace les éléments d'un espace à l'autre.

Enfin, Hermann Weyl exprime le *principe de continuité*, stipulant que l'« orientation » respective des espaces infinitésimaux ne doit pas brusquement changer par le fait qu'on peut, pour un point P quelconque, trouver un système de coordonnées tel que le transport des éléments infinitésimaux (vecteurs, longueurs…) du point P vers les points P' infiniment proche s'exprimera simplement en laissant invariante, d'un point à un autre, la représentation numérique de ces éléments.

Toutes ces considérations vont prendre un sens plus concret et précis quand nous parcourons ci-dessous l'une après l'autre chacune des strates. Avant de procéder à un tel parcours, il faut rappeler que la notion mathématique de connexion n'est pas une invention d'Hermann Weyl. La première forme de connexion à naître dans la communauté mathématique est née dans le cadre des espaces de Riemann. Hermann Weyl reconnait pour les principaux continuateurs de la pensée de Riemann : Christoffel, Tullio Levi-Civita et Gregorio Ricci. Ce sont eux qui ont progressivement mis en place la première notion de connexion.

Reconstruisons brièvement cette idée d'une connexion dans un espace de Riemann dans un vocabulaire un peu plus moderne, en montrant comment les concepts se sont mis progressivement en place. Seulement ensuite, nous aborderons la géométrie infinitésimale d'Hermann Weyl. Notre exposition n'a pas pour but d'introduire à la notion de connexion, et nécessite donc une certaine familiarité avec ces concepts.

b. A mi-chemin de la Nahegeometrie : des symboles de Christoffel à la connexion de Levi-Civita

Un espace de Riemann (V_n, g) est localement assimilable à un espace euclidien au sens où chaque espace tangent T_P en un point P de notre variété est muni d'une forme quadratique différentielle $g_{\mu\nu}(P)$.

Une des hypothèses de base d'un espace de Riemann consiste à supposer que les éléments linéaires ont une certaine longueur qui possède un sens *indifféremment du point où cet élément linéaire est défini*. Ainsi, cela a un sens, dans un espace de Riemann, de comparer la longueur de deux éléments linéaires définis en des points finiment éloignés. Nous n'avons ainsi pas à définir de notion locale de « transport » de la longueur d'un espace infinitésimal vers ses voisins. Dans un espace de Riemann, *la strate métrique n'est pas construite selon le programme de la Nahegeometrie*.

Contrairement à la notion de distance, la comparaison des directions (vecteurs) et des angles n'a pas de sens immédiat à distance finie dans un espace de Riemann. Les éléments linéaires attachés à des points différents P et P' de la variété sont en eux-mêmes incommensurables. On peut exprimer cette incommensurabilité en disant que ces éléments linéaires vivent dans des espaces différents : les espaces tangents associés respectivement aux points P et P'[237]. De ce fait, cela n'a pas non plus de sens en général, dans un espace de Riemann, de parler de l'angle que font entre eux deux vecteurs attachés respectivement à deux points différents de la variété. La variabilité des coefficients $g_{\mu\nu}$ sur notre espace a rapport avec un changement progressif dans l'orientation angulaire des espaces tangents. On peut le visualiser facilement dans le cas particulier des surfaces courbes plongées dans un espace ambiant euclidien, le cas ancestral de toute la géométrie différentielle. On voit alors clairement que les espaces affines tangents, cette fois compris comme des sous-espaces affines de l'espace ambiant, changent infinitésimalement d'orientation dans le passage d'un point à un autre de la variété. C'était au cœur du travail de C.F. Gauss puisque sa notion de mesure de courbure en un point P d'une surface était définie initialement de façon extrinsèque, d'une manière que l'on peut interpréter comme une sorte de mesure de la vitesse angulaire avec laquelle les espaces tangents divergent les uns des autres, quand on s'écarte du point P[238].

Il n'y a cependant chez Gauss, ni à notre connaissance chez Riemann, aucune trace d'une tentative d'exprimer comment on peut comparer de manière sensée deux vecteurs définis en deux points différents d'un même espace de Riemann. La première tentative de ce genre apparait dans les travaux de Christoffel. Celui-ci cherchait des conditions nécessaires

[237] Hermann Weyl n'utilise pas explicitement la notion d'espace tangent dans *Espace-Temps-Matière* mais plutôt dans [Weyl 1918c].

[238] La mesure de courbure en un point P d'une surface est en effet définie dans [Gauss 1827] comme suit. On prend des voisinages du point P sur la surface et on calcule le rapport entre l'angle solide balayé par le vecteur unitaire normal à la surface quand on parcourt le voisinage considéré, et l'aire de ce voisinage. La mesure de courbure au point P est la limite de ce rapport quand le voisinage se resserre autours de P. Pour aboutir à notre interprétation, il suffit alors de voir que l'angle entre deux vecteurs normaux à la surface, définis respectivement en P et P', peut servir naturellement à définir l'angle que font entre eux les espaces tangents en P et en P' au sein de l'espace ambiant.

et suffisantes pour identifier deux fonctions x⟶ $g_{\mu\nu}(x)$ et x'⟶ $g_{\mu\nu}(x')$ définies sur une variété de dimension *n,* comme étant les expressions d'une seule et même forme quadratique écrite dans deux systèmes de coordonnées différents. Christoffel cherche à caractériser le changement de coordonnées qui transformerait une expression en une autre. Il montre alors que les dérivées partielles secondes de x' par rapport x (x et x' étant maintenant interprétés comme deux systèmes de coordonnées dont on cherche à exprimer les relations) doivent vérifier les relations qu'on écrit aujourd'hui :

$$\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\rho}} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} \nu & & \rho \\ & i & \end{matrix} \right\} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^i} + \sum_{j,k} \left\{ \begin{matrix} j & & k \\ & \mu & \end{matrix} \right\} \frac{\partial x'^{j}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\rho}}$$

où les $\left\{ \begin{matrix} j & & k \\ & i & \end{matrix} \right\}$ (i, j, k variant de 1 à n) sont n^3 coefficients qu'il introduit et qui s'expriment par les formules (transcrites en notation moderne) :

$$\left\{ \begin{matrix} j & & k \\ & i & \end{matrix} \right\} = \sum_{\alpha} -\frac{1}{2} g^{i\alpha} \left(\frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{\alpha}} \right)$$

Au cours de son travail, Christoffel démontre qu'avec ces coefficients, on peut former un objet, qu'on appelle aujourd'hui le tenseur de courbure de Riemann noté $R^a{}_{bcd,}$ par la formule classique notée aujourd'hui :

$$R^a_{bcd} = \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} c & & b \\ & a & \end{matrix} \right\}}{\partial x^d} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} b & & d \\ & a & \end{matrix} \right\}}{\partial x^c} + \left\{ \begin{matrix} c & & b \\ & n & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n & & d \\ & a & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} b & & d \\ & n & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} n & & c \\ & a & \end{matrix} \right\}$$

Cet objet, dont Christoffel décrit dans son langage la nature tensorielle, contient le même type d'information que les courbures sectionnelles qu'avaient introduites Riemann dans [Riemann 1854] pour généraliser la courbure intrinsèque de Gauss aux espaces *n*-dimensionnels.

Christoffel montre aussi qu'en ajoutant aux dérivées partielles d'un (champ de) tenseur(s) certains termes faisant intervenir les coefficients « $\left\{ \begin{matrix} j & & k \\ & i & \end{matrix} \right\}$ », on obtient des expressions qui se comportent vis-à-vis des coordonnées comme les composantes d'un nouveau tenseur. Il s'agit de ce qu'on identifie aujourd'hui comme la *dérivée covariante* du champ de tenseurs initial. Ce pas est important car les dérivées partielles d'un champ de tenseur ne formaient pas un objet ayant des propriétés de variation acceptables lors d'un changement de coordonnées[239], sauf pour le cas limite d'un champ de scalaires. Ces dérivées partielles modifiées par un facteur faisant intervenir les $\begin{Bmatrix} j & & k \\ & i & \end{Bmatrix}$ fournissent un premier objet géométrique représentant naturellement la variation de la valeur d'un champ de tenseurs lors du passage d'un point de la variété à un autre. C'est donc un pas important vers la notion de connexion.

Cependant, Christoffel n'étudie pas de manière générale cette « dérivation covariante » pour tous les champs de tenseurs. Il n'en étudie que des cas particuliers, notamment le tenseur métrique lui-même dont la dérivée covariante s'avère nulle, et le tenseur de Riemann et ses dérivées covariantes successives. Ces « dérivées covariantes » particulières n'apparaissent dans le travail de Christoffel que comme des intermédiaires pour parvenir à répondre à sa question initiale.

C'est dans les travaux de Gregorio Ricci-Curbastro et Tullio Levi-Civita, notamment dans leur fameux article de 1900[240], que la notion de dérivation covariante d'un champ de tenseurs sur un espace de Riemann est exposée pour la première fois pour elle-même et dans toute sa généralité. Les deux auteurs écrivent explicitement l'équation des géodésiques à l'aide des symboles de Christoffel et l'interprètent en disant que la « quantité d'accélération » d'une géodésique est nulle (la dérivée covariante du vecteur tangent le long de lui-même).

En 1917[241] Levi-Civita montre comment les symboles de Christoffel permettent d'établir une connexion entre deux espaces tangents définis en deux points infiniment voisins P et P'. Pour cela, il introduit la notion de « transport parallèle » d'un vecteur le long d'un chemin reliant deux points P et P' de la variété. Ce transport parallèle doit établir une isométrie linéaire entre l'espace en P et l'espace en P'. Ce transport parallèle est dérivé de la

---

[239] Par exemple, lors d'un changement de coordonnées (x→x'), les dérivées partielles $\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}$d'un champ de vecteurs contravariants $\xi^\mu(x)$, se transforment selon la formule :

$$\frac{\partial \xi'^\mu}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\nu}\xi^\beta .$$

Le dernier terme à droite empêche non seulement « $\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}$ » d'être un tenseur, mais il l'empêche même d'être un objet géométrique au sens général que nous avons présenté dans notre annexe I.4. La connaissance de $\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu}$ dans un système de coordonnées ne suffit pas à connaître sa valeur dans un autre système de coordonnées, même si on connait les relations entre les deux systèmes. Il faut en outre connaitre le champ « ξ^β ».

[240] [Ricci&Levi-Civita, 1900]

[241] [Levi-Civita, 1917]

notion de dérivation covariante, dans la mesure où on le définit par l'exigence suivante : en déplaçant le vecteur le long de notre chemin, on construit une application qui à chaque point du chemin associe un vecteur dans l'espace tangent correspondant à ce point. Cette application est univoquement déterminée par l'équation différentielle qui exprime que la dérivée covariante du vecteur déplacé le long de la courbe doit être nulle.

Cette notion de déplacement n'est pas intégrable au sens où le vecteur obtenu par transport parallèle dépend du chemin emprunté et non pas uniquement du vecteur initial. Seul le transport d'un point à un autre *infiniment proche* est univoquement déterminé. Notons enfin que le tenseur de courbure, exprimé à l'aide des symboles de Christoffel, admet une interprétation simple en termes du transport parallèle de Levi-Civita. En effet, le tenseur $R^a{}_{bcd}$ au point P permet d'exprimer la variation d'un vecteur qu'on transporte parallèlement le long d'un parallélogramme infinitésimal qui part et revient au point P. Si dx^μ et δx^ν (μ, ν = 1…n) sont les coordonnées des deux déplacements successifs qui forment les deux premiers côtés du parallélogramme, alors le vecteur ξ^μ déplacé variera de :

$$\Delta\xi^\mu = R^\mu{}_{abc}\,\xi^a\,dx^b\,\delta x^c$$

L'annulation du tenseur de courbure sur un ouvert de la variété signifie alors que le transport des vecteurs y est intégrable, donc que la variété est semblable à un espace euclidien sur cet ouvert.

L'approche de Levi-Civita n'est pas complètement « intrinsèque » dans la mesure où il est obligé de plonger l'espace qu'il considère dans un espace euclidien ambiant. Cependant, la principale lacune dans sa notion de connexion, appelée désormais « *connexion de Levi-Civita* », vient de ce qu'elle ne prend sens que dans un espace où est défini une métrique, et même uniquement dans le cas particulier des espaces de Riemann.

c. Le rôle d'Hermann Weyl dans l'achèvement d'une géométrie infinitésimale pure : *la strate affine*

Hermann Weyl pensait que l'idéal d'une géométrie infinitésimale n'était pas entièrement réalisé dans les espaces de Riemann dont la connexion était pensée comme connexion de Levi-Civita:

> Inspiré par l'appui remarquable qu'offre la théorie d'Einstein pour examiner à nouveau les fondements mathématiques, le présent auteur [Hermann Weyl] a découvert que la géométrie de Riemann ne s'arrête qu'à mi-chemin en direction de l'idéal d'une géométrie infinitésimale pure [reinen Infinitesimalgeometrie]. Il reste toujours à éliminer le dernier élément de géométrie « à distance finie » [ferngeometrisches], un résidu de son passé euclidien. Riemann a supposé qu'il était également possible de comparer les longueurs de deux éléments linéaires à *différents* points de l'espace. Il n'est pas autorisé d'utiliser les comparaisons à distance dans une géométrie de proche en proche [Nahegeometrie]. Un seul principe est autorisé par lequel une mesure de distance est transportable d'un point à un autre infiniment proche.[242]

Nous avons vu que la connexion de Levi-Civita dans un espace de Riemann permettait de donner un sens au transport d'un vecteur d'un point de l'espace à un autre. Durant ce transport, le vecteur déplacé change continument d'*orientation* conformément à la courbure de l'espace, si bien qu'en intégrant plusieurs transports parallèles infinitésimaux pour former un lacet qui revient sur le point initial, le vecteur après transport le long du lacet fera en général un angle non nul avec le vecteur initial. En revanche la longueur du vecteur, après son parcours du lacet, n'aura pas changé en raison de l'hypothèse riemannienne selon laquelle la distance d'un élément linéaire a un sens *indépendamment du lieu où on se trouve*. Cette asymétrie entre le traitement des directions et le traitement des longueurs est l'impureté dans la géométrie riemannienne dont Hermann Weyl veut se débarrasser.

Ce mélange dans les espaces de Riemann, entre une composante de géométrie à distance et une composante de géométrie infinitésimale, crée une disharmonie responsable d'une certaine complexité sur le plan des strates géométriques à l'intérieur desquelles agit la connexion de Levi-Civita. En effet, bien que les symboles de Christoffel ne prennent sens qu'au cœur d'une théorie *métrique* (les espaces de Riemann), ils servent, dans l'interprétation en termes de « transport parallèle », à déplacer non pas les distances mais les vecteurs, une notion de la strate *affine* donc. Ce transport doit laisser inchangés aussi bien les longueurs des vecteurs que leurs angles. Cependant, la nature de ces deux contraintes est fondamentalement différente. En raison de l'hypothèse riemannienne non infinitésimale, la préservation des longueurs est une contrainte qui agit « à distance », un élément de Ferngeometrie. Cette contrainte qui lie le vecteur à la fin du déplacement au vecteur initial est indépendante du chemin suivi et de l'espace qui les sépare. Par contre,

---

[242] Notre traduction. [RZM 1919, 91] :

> Bei der durch Einsteins große Konsequenzen angeregten erneuten Prüfung der mathematischen Grundlagen ergab sich dem Verf. die Bemerkung, daß die Riemannsche Geometrie das Ideal einer reinen Infinitesimalgeometrie erst zur Hälfte erreicht; es gilt, noch ein letztes ferngeometrisches Element auszuscheiden, das ihr von ihrer Euklidischen Vergangenheit her anhaftet. Riemann setzt nämlich voraus, daß man irgend zwei Linienelemente auch an *verschiedenen* Stellen des Raumes messend miteinander vergleichen kann; *die Möglichkeit eines solchen Fernvergleichs kann in einer reinen Nahegeometrie nicht zugestanden werden*, es ist nur ein Prinzip zulässig, das die Übertragung einer Maßstrecke von einem Punkte nachden unendlich benachbarten ermöglicht.

puisque les orientations (angles) des vecteurs n'ont qu'un sens local, par le biais de la forme quadratique différentielle, la contrainte de préservation des angles ne peut avoir de sens que de proche en proche. Ainsi, relativement à la notion d'orientation des vecteurs, contrairement à la notion de longueur, les symboles de Christoffel fonctionnent donc bien conformément au programme de la Nahegeometrie.

Nous allons voir que les apports d'Hermann Weyl qui vont achever de réaliser une géométrie infinitésimale pure sont de deux ordres. Non seulement il va se débarrasser de l'hypothèse riemannienne indue en introduisant une notion de transport infinitésimal *des longueurs*. Mais l'élimination de ce résidu de géométrie à distance va également permettre à Hermann Weyl d'éclaircir les rapports entre les différentes strates spatiales, en construisant d'abord de manière indépendante une Nahegeometrie purement affine, avant de parvenir à la Nahegeometrie métrique par l'ajout de nouvelles structures. Suivons le même ordre que dans *Espace-Temps-Matière* : parcourons d'abord la strate affine, puis seulement ensuite la strate métrique (et implicitement la « strate conforme » qu'elle comprend).

<u>Les espaces infinitésimaux affines :</u>

L'existence d'espaces affines infinitésimaux similaires en chaque point de la variété, est équivalente à l'exigence du caractère au moins *C^1-différentiable* de la variété. Si l'appellation de « variété différentiable » est encore absente, l'idée est bien là. Hermann Weyl demande que les fonctions qui expriment le passage d'un système de coordonnées à un autre sur notre variété aient des dérivées du premier ordre continues[243] et que le déterminant $\left|\frac{\partial x^i}{\partial x'^j}\right|$ soit non nul.

On conçoit le caractère localement affine d'une telle variété en montrant l'existence en tout point d'un espace affine tangent à la variété[244]. Comme les espaces vectoriels sous-tendant ces espaces affines sont de mêmes dimensions *n* (la dimension de la variété), ils sont linéairement isomorphes. En ce sens, les espaces affines infinitésimaux sont tous similaires.

[243] [RZM 1919, 92]

[244] La notion d'espace tangent est à comprendre ici dans un sens intrinsèque. Il ne faut pas penser, par exemple, à la notion de plan tangent à une surface courbe comme étant un sous-espace affine de l'espace ambiant dans lequel la surface est plongée. Il faut plutôt comprendre que le voisinage d'un point X_0 d'une variété C^1-différentiable de dimension *n* est assimilable à un espace vectoriel de dimension *n*. Les déplacements infinitésimaux dx^i (exprimés dans un système de coordonnées donné) obtenus en reliant le point X_0 à ses voisins sont les éléments de cet espace vectoriel. Cette façon un peu informelle de présenter la notion est celle de Weyl dans [Weyl 1918c].

Sans doute en raison de l'importance qu'il accorde à la notion de transformation pour caractériser l'espace, Hermann Weyl choisit dans *Espace-Temps-Matière* de montrer le caractère localement affine d'une variété différentiable en recourant à une analyse des *changements de coordonnées* d'une telle variété. Il montre que les vecteurs attachés à un point d'une telle variété se transforment lors d'un changement de coordonnée comme se transforment les vecteurs d'un espace affine, c'est-à-dire *par une transformation linéaire* (matrice), à ceci près que la matrice de transformation prend alors un sens uniquement local. Développons. Les transformations spatiales dans un espace vectoriel, type particulier de Ferngeometrie, sont données par des transformations linéaires s'exprimant dans des coordonnées affines, adaptées à cette Ferngeometrie, selon la formule :

$$x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}.$$

Maintenant, les transformations d'une variété C^1-différentiable sont les difféomorphismes (locaux) :

$$x'^{\mu} = f(x^{\nu}) \qquad \text{(f difféomorphisme de caractère } C^1\text{)}$$

Ce ne sont pas en général des fonctions linéaires mais ils se laissent approcher localement par leurs différentielles qui, elles, sont bien des fonctions linéaires :

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\, dx^{\nu} = a^{\mu}{}_{\nu}\, dx^{\nu} \qquad \left(\text{en posant } a^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\right)$$

où il faut comprendre que les différentielles et les dérivées partielles sont toutes rapportées à un même point de la variété.

L'écriture d'Hermann Weyl[245] permet ainsi de saisir la similitude de forme entre l'équation de transformation dans une Ferngeometrie affine (ou linéaire si on préfère) et l'équation dans une Nahegeometrie affine, la différence étant que la transformation dans la Nahegeometrie n'est linéaire que si l'on s'intéresse non pas à l'espace complet mais au voisinage infinitésimal d'un point.

La notion de vecteur comme translation, issue de la Ferngeometrie affine, a pu ainsi être transposée à une Nahegeometrie, au prix qu'elle a alors seulement un sens local, les différentielles dx^{μ} étant essentiellement rattachées à un point de la variété. De même, on

245 Toujours [RZM 1919, 92]

peut transposer l'ensemble de l'algèbre tensorielle développée pour un espace affine[246] à notre variété différentiable. Il suffit de rattacher chaque tenseur que nous considérons à un point de la variété. Les matrices susceptibles d'exprimer la transformation du tenseur, lors d'un changement de coordonnées, sont les matrices « locales » : $[\frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu}(x_0)]$ et son adjointe. Pour l'ensemble du calcul tensoriel et de l'analyse tensorielle sur une variété différentiable nous renvoyons au texte d'Hermann Weyl[247].

La connexion affine :

Maintenant que nous disposons de la notion d'espaces infinitésimaux affines tous similaires, il faut concevoir comment les connecter les uns aux autres. Un premier apport capital d'Hermann Weyl pour parvenir à la géométrie infinitésimale pure, consiste à donner son indépendance à la notion de *connexion affine* à l'égard de la strate métrique de la géométrie. La connexion de Levi-Civita, exprimée en coordonnées par les symboles de Christoffel dérivant d'une forme quadratique, n'est qu'un cas particulier d'une structure générale ayant un sens authentiquement affine.

Une *connexion affine* devra connecter les espaces infinitésimaux au sens où nous en avons parlé dans notre paragraphe IV.1.c. La connexion doit définir un isomorphisme linéaire entre l'espace des vecteurs en un point P, et l'espace des vecteurs en un point P' infiniment proche. On pourra décrire en coordonnées cet isomorphisme en écrivant son écart par rapport à l'identité sous la forme :

$$\xi^\mu(x) \rightarrow \xi^\mu(x) + d\gamma^\mu{}_\nu(x, dx)\, \xi^\nu(x)$$

Ici, le « d » ne renvoie pas à un signe de dérivation mais indique que les coefficients sont des infiniment petits ; i.e. qu'ils doivent tendre vers 0 quand le point P' se rapproche de P, c'est-à-dire quand dx tend vers 0. Pour terminer de caractériser la notion de connexion, il va falloir préciser exactement comment cet isomorphisme varie quand on déplace le point P' par rapport au point P, c'est-à-dire comment $d\gamma^\mu{}_\nu(x, dx)$ varie en fonction de « dx ».

C'est ici qu'intervient ce qu'Hermann Weyl appelle le « principe de continuité », exprimant que le passage d'un espace infinitésimal à un espace voisin se fait de façon « continue ». Hermann Weyl applique ce principe de continuité à la strate affine en

[246] La définition des tenseurs et leur algèbre dans un espace affine sont développées en [RZM 1918, 30-51]

[247] [RZM 1919, 92-100]

demandant que, dans un certain système de coordonnées qu'il nomme « géodésique », les coordonnées du vecteur transporté ne varient pas dans le transport à un point infiniment proche[248].

Ainsi, une fois fixé le point P, on doit poser qu'il existe un système de coordonnées $(\overline{x^1}, \dots, \overline{x^n})$ tel que :

$$\overline{d\gamma_{\mu\nu}}\,(\bar{x}, \overline{dx}) = 0 \qquad \text{(dans toute direction } \overline{dx}\text{)}$$

On en déduit[249] que la dépendance de $d\gamma^{\mu}{}_{\nu}$ à l'égard des dx^{μ} est linéaire et qu'il existe alors des coefficients $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ associés au point considéré, vérifiant la symétrie $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}$, tels que la variation $d\xi^{\mu}$ des coordonnées du vecteur ξ^{μ} quand il est déplacé de P(x) à P'(x+dx) s'exprimera finalement par :

$$d\xi^{\mu}(x, dx) = d\gamma^{\mu}{}_{\nu}(x, dx)\, \xi^{\nu}(x) = \Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}(x)\, dx^{\rho}\, \xi^{\nu}(x)$$

Cette définition des coefficients $\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}(x)$ permet de déterminer leur nature spatiale, i.e. leur mode de dépendance à l'égard du système de coordonnées[250]. Enfin, Hermann Weyl montre qu'en plus du fait que tous les espaces infinitésimaux sont partout identiques, la connexion a également partout la même nature et cette nature ne dépend pas de l'espace à connexion affine considéré. En effet, pour n'importe quel point P d'une variété à connexion affine, on peut trouver un système de coordonnées qui donne aux coefficients de la

---

[248] Une autre expression mathématique équivalente du principe de continuité est proposée dans [Weyl 1918c]. Il s'agit de poser que le déplacement qui part d'un point P (x^{μ}) et suit d'abord le vecteur « dx^{μ} » puis le vecteur obtenu en transportant « δx^{μ} » du point P au point de coordonnée ($x^{\mu}+dx^{\mu}$) aboutit au même point que le déplacement consistant à partir de P et à suivre d'abord le vecteur « δx^{μ} » puis le vecteur obtenu en transportant « dx^{μ} » du point P au point de coordonnées ($x^{\mu}+\delta x^{\mu}$). Ce principe impose qu'on revienne au même point après avoir parcouru un parallélogramme infinitésimal. L'expression exacte de ce principe n'est pas absolument triviale. Cf. le texte d'Hermann Weyl.

[249] [RZM 1919, 101-102]

[250] Hermann Weyl ne donne pas explicitement les formules de changement de coordonnées pour $\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}$ puisqu'il n'en a pas besoin. Il indique simplement en [RZM 1919, 102] que ses hypothèses suffisent à les déterminer et que les $\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}$ ne sont pas les coefficients d'un tenseur mais d'un objet spatial plus complexe. On sait bien qu'un changement de coordonnée ($x \to x'$) agit sur les coefficients $\Gamma^{\mu}{}_{\rho\nu}(x)$ d'une connexion affine selon pour donner :

$$\Gamma'^{i}_{jk} = \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{j}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{k}} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^{i}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial^2 x^{\delta}}{\partial x'^{j} \partial x'^{k}}.$$

connexion n'importe quel jeu de valeurs $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (avec $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}= \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$)[251], le jeu de valeurs nul correspondant à un système de coordonnées géodésique.

Dérivation covariante et géodésiques affines :

Une fois la connexion définie, Hermann Weyl montre comment elle permet de transposer dans le domaine de la Nahegeometrie affine certaines notions qui, contrairement aux tenseurs, n'étaient pas des grandeurs purement locales (au sens de « liées à un point unique de la variété »). Ces notions dépendent de la connexion des structures affines sur un ouvert de la variété. Les principales notions de ce type sont les notions de « dérivation » d'un champ de tenseurs, et la notion corrélative de courbe géodésique, conformément à ce qu'avaient déjà montré Christoffel, Ricci et Levi-Civita sur le cas particulier des espaces de Riemann. Suivant une méthode analogue, Hermann Weyl expose comment la connexion permet de définir une notion de « dérivation covariante » d'un tenseur, qui a un sens objectif, c'est-à-dire indépendante du sujet-coordonnées. En effet, la dérivation covariante transforme un champ de tenseurs en un autre champ de tenseurs possédant un indice supplémentaire[252].

L'équivalent dans la Nahegeometrie affine de la notion de ligne droite d'un espace affine (Ferngeometrie) est alors la notion de *géodésique*. C'est une courbe telle qu'un vecteur tangent à la courbe en un point reste tangent à la courbe si on le transporte parallèlement le long de la courbe. La notion de géodésique définie par la notion de

[251] Pour le voir, il faut prendre à rebours la construction de [RZM 1919, 101]. Pour un jeu de valeurs donné $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, il suffit de prendre un système de coordonnées (x^1, …, x^n) défini relativement à un système de coordonnées ($\overline{x^1}$, …, $\overline{x^n}$) géodésique au point P, par la formule :

$$x_i - {x_i}^0 = \overline{x_\iota} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{rs}\overline{x_r}\,\overline{x_s}$$

où ${x_i}^0$ désigne les coordonnées du point P. Le théorème d'inversion locale nous dit que cette équation définit bien un changement de coordonnée légitime sur un voisinage de P.

Ainsi, la nature géométrique d'une connexion affine *en un point P* est univoquement déterminée par la donnée de la nature spatiale de la connexion et de la symétrie « $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}= \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$ ». Autrement dit, le groupe G des difféomorphismes de la variété agit *transitivement* (une seule orbite) sur le sous-ensemble qu'on notera « C » de $(R^n)^3$ constitué par les tableaux Γ^i_{jk} de valeurs réelles à 3 indices tels que $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, par l'action de groupe :

$$G * C \rightarrow C$$

$$x \rightarrow x',\ \Gamma^{\ i}_{jk} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha}(P)\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}(P)\frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^k}(P)\Gamma^{\ \alpha}_{\beta\gamma} + \frac{\partial x'^i}{\partial x^\delta}(P)\frac{\partial^2 x^\delta}{\partial x'^j \partial x'^k}(P).$$

[252] De nos jours, les relations entre la notion de connexion et la notion de dérivation sur une variété ont été approfondies. Certains auteurs définissent la connexion directement par le choix d'une notion de dérivation sur la variété au sein de l'ensemble de toutes les dérivations possibles. Pour la présentation d'Hermann Weyl de la dérivation covariante et de la notion affine de géodésique : [RZM 1919, 102-105].

transport se trouvait déjà chez Levi-Civita. Cependant, grâce au sens purement affine qu'Hermann Weyl a donné à la connexion, on parvient à une notion de géodésique purement affine. L'idée métrique du plus court chemin reliant deux points n'intervient plus du tout, mais seulement l'idée purement affine de la conservation d'une même direction tout au long du trajet.

<u>Tenseur de courbure (affine) :</u>

On peut définir le tenseur de courbure sur un espace à connexion affine, qu'on notera en coordonnées $F^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}$ avec Weyl, de la même façon que dans un espace de Riemann muni de la connexion de Levi-Civita. Il suffira de remplacer les symboles de Christoffel par les coefficients de la connexion affine la plus générale :

$$F^{a}_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^{a}_{bc}}{\partial x^{d}} - \frac{\partial \Gamma^{a}_{bd}}{\partial x^{c}} + \Gamma^{n}_{bc}\Gamma^{a}_{dn} - \Gamma^{n}_{bd}\Gamma^{a}_{cn}$$

L'interprétation du tenseur de courbure dans les termes d'un écart par rapport à l'espace euclidien (notion métrique), doit être remplacée par l'idée d'un écart entre le comportement affine de notre variété et celui d'un espace affine (au sens de la Ferngeometrie). L'annulation du tenseur de courbure sur un ouvert de la variété signifie que les relations affines y sont semblables à celles d'un ouvert d'un espace affine. Le transport des vecteurs est alors intégrable sur cet ouvert.

L'interprétation du tenseur de courbure comme exprimant la variation d'un vecteur quand il est transporté le long d'un parallélogramme infinitésimal doit être également légèrement modifiée. Dans un espace de Riemann, à cause de l'hypothèse du caractère absolu de la notion de distance (au sens de la Ferngeometrie), le vecteur obtenu après le transport doit être de même longueur que le vecteur initial. Le tenseur de courbure $R^{a}{}_{bij}$ dans un espace de Riemann appliqué à un élément de surface (parallélogramme infinitésimal) :

$$\Delta x^{ij}=(dx^{\mu}\delta x^{\nu}-\delta x^{\mu}dx^{\nu}),$$

doit donc induire une *transformation orthogonale* sur notre espace tangent. Le vecteur $\Delta\xi^{\mu}$, écart entre le vecteur transporté et le vecteur initial, doit donc être orthogonal au vecteur initial.

Etant donné que l'écart s'écrit :

$$\Delta\xi^{\mu} = R^{\mu}{}_{\nu ij}\,\Delta x^{ij}\,\xi^{\nu},$$

le caractère orthogonal de cette transformation va se traduire par le fait que le tenseur de courbure de Riemann R_{abcd}, écrit en coordonnées entièrement covariantes, n'est pas seulement antisymétrique vis-à-vis des deux derniers indices (parcours en sens inverse du parallélogramme infinitésimal), mais aussi vis-à-vis des deux premiers.

Dans un espace à connexion affine général, le transport d'un vecteur le long d'un parallélogramme infinitésimal n'engendre plus une transformation orthogonale (cela n'a plus aucun sens), mais plus généralement un automorphisme linéaire. La condition d'antisymétrie de R_{abcd} vis-à-vis de a et b, qui pouvait s'exprimer en coordonnées « mixtes » par :

$$g_{\mu\nu}\,(R^{\mu}{}_{abc}\,\Delta x^{bc}\,\xi^{a})\,\xi^{\nu} = 0$$

n'a donc plus aucun équivalent pour le tenseur de courbure dans un espace à connexion affine général.

d. Le rôle d'Hermann Weyl dans l'achèvement d'une géométrie infinitésimale pure : *les strates conformes et métriques*

Une fois la strate affine construite selon l'idéal de la Nahegeometrie, Hermann Weyl va achever la construction d'une géométrie infinitésimale pure en construisant selon des principes similaires les strates conforme (notion d'angle) et métrique. La construction présentée dans *Espace-Temps-Matière* ne se compose pas d'une Nahegeometrie indépendante ayant un sens purement « conforme », complétée ensuite par une Nahegeometrie métrique. Au lieu de cela, Hermann Weyl construit directement une Nahegeometrie métrique. Cependant, au sein de sa construction, il prend soin de distinguer les éléments qui ne dépendent pas de la comparaison à distance des longueurs mais uniquement des rapports de longueurs. En ce sens, ces éléments sont porteurs d'une signification « conforme » plutôt que métrique.

<u>Espaces infinitésimaux métriques :</u>

Dans une Nahegeometrie métrique, comme pour les espaces de Riemann ou les espaces pseudo-Riemanniens, la longueur des vecteurs d'un espace tangent à un point P de la variété, va être donnée par une *forme quadratique non dégénérée liée à P*. Etant donné l'abandon de l'hypothèse riemannienne d'une signification « à distance » [Fern] de la notion de longueur, ce ne sera pas la valeur absolue de la longueur d'un vecteur qui va avoir un sens mais plutôt le *rapport* entre les longueurs de plusieurs vecteurs pris dans un même espace tangent. Ainsi, plutôt qu'une forme quadratique univoquement déterminée, on pourra considérer que la forme quadratique associée à chaque point de la variété n'est déterminée qu'à la multiplication près par un facteur positif λ, la *calibration* [Eichung].

Comme pour un espace de Riemann, on pourra exprimer en coordonnées ces formes quadratiques locales par des coefficients $g_{\mu\nu}(x)$ variables d'un point à un autre de la variété. La possibilité de modifier indépendamment la calibration de chaque espace métrique infinitésimal s'exprimera par la possibilité de multiplier le champ quadratique $g_{\mu\nu}(x)$ par un facteur de calibration $\lambda(x)$ qui est une fonction continue du lieu. La fixation d'un facteur de calibration est interprétée par Hermann Weyl comme le fait de choisir en chaque point de la variété une unité de mesure des longueurs qui a un sens seulement local. L'introduction de ce nouveau facteur est arbitraire, subjectif, mais indispensable à la représentation numérique des objets géométriques de notre espace. Il a ainsi le même statut que le système de coordonnées. Tout comme on doit penser la différence conceptuelle entre un vecteur au sens abstrait (notion objective), et sa représentation numérique dépendante d'un élément subjectif (le système de coordonnées) ; il faut de même différencier la longueur d'un vecteur de la « mesure de longueur », qui dépend de la donnée subjective du facteur de calibration. L'introduction de cette nouvelle composante subjective oblige à un réaménagement de la notion de nature spatiale d'un objet. Hermann Weyl pousse encore plus loin le parallèle entre la notion de système de coordonnées et celle de calibration en montrant que les applications « changement de coordonnées » et « changement de calibration » sont toutes les deux localement des applications linéaires.

Le fait qu'on ait retiré toute signification à la valeur absolue des coefficients $g_{\mu\nu}$ au bénéfice des *rapports* entre ces coefficients, entraine que la forme quadratique $g_{\mu\nu}(x)$ a perdu le sens authentiquement métrique qu'elle avait dans un espace de Riemann. Il faut donc imaginer son évolution sur la variété comme ayant trait plutôt à un changement d'*orientation* progressif des espaces tangents. En ce sens, même si ce n'est pas la façon de parler d'Hermann Weyl, on pourrait dire que le tenseur $g_{\mu\nu}$ est plutôt le mode d'expression des propriétés *conformes* sous-jacentes à l'espace de Weyl que de ses propriétés *métriques* proprement dites.

La continuité des fonctions $g_{\mu\nu}(x)$, qui est une première étape en vue de la construction future d'une connexion métrique, implique que les formes quadratiques associées à chaque point aient la même signature. Par un changement de coordonnée et de calibration, on peut alors ramener l'expression de la forme quadratique $g_{\mu\nu}(x)$ *en un point P(x)* à la forme canonique :

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots \end{matrix}$$

où le nombre de « 1 » et de « -1 » sur la diagonale est déterminé par la signature des $g_{\mu\nu}(x)$. L'existence de cette représentation unique pour la forme quadratique associée à chaque point considéré isolément, est l'expression mathématique de la similarité de nature entre ces espaces infinitésimaux. Il y a une isométrie linéaire qui relie n'importe quel couple de ces espaces infinitésimaux, ou plutôt une homothétie si on veut tenir compte du fait qu'il n'y a pas d'étalon de mesure ayant un sens objectif au sein de chacun de ces espaces infinitésimaux.

<u>La connexion métrique :</u>

Une connexion métrique sera établie entre un point P et un point P' infiniment proche si on sait comment une longueur est transportée du point P au point P'. De même qu'une connexion affine entre un point P et un point P' consiste à sélectionner une isomorphie linéaire entre l'espace tangent T_P et $T_{P'}$, une connexion métrique sera établie entre ces deux points en sélectionnant une isomorphie linéaire[253] entre l'espace des longueurs au point P et l'espace des longueurs au point P'. L'image d'une longueur par cet isomorphisme sera considérée comme étant « la même distance » transportée du point P au point P'. Comme l'espace des distances en un point est un espace linéaire de dimension 1, un tel isomorphisme consistera simplement en la multiplication par un facteur réel qu'on écrira « (1-dφ) » pour suivre les notations d'Hermann Weyl. Comme pour le « $d\gamma^j_k$ » que nous avions rencontré dans l'étude de la connexion affine, le « d » apparaissant dans l'écriture « dφ » n'est pas un signe de dérivation mais renvoie au fait que cette quantité doit tendre vers zéro quand P et P' se rapprochent l'un de l'autre, ce qui est une première forme de continuité imposée à la connexion que nous sommes en train de mettre en place.

[253] La linéarité de l'application ici se comprend par le fait que les fonctions distances définies en chacun des points doivent être des fonctions homogènes du premier ordre par rapport aux vecteurs. Puisque deux vecteurs définis au point P et liés linéairement, dx^μ et αdx^μ, admettent des mesures de distance dl et $|\alpha|$dl, et si on veut que ces deux vecteurs restent liés linéairement par le même rapport quand ils sont transportés parallèlement jusqu'à un point P', alors leurs nouvelles distances transportées seront du type : dl' et $|\alpha|$dl'. D'où l'existence d'un rapport positif (1+dφ) liant dl et dl'.

Quand on change la calibration des espaces métriques infinitésimaux de notre variété par un facteur λ(x), une distance l(x) devient $\bar{l}$(x)=l(x)*λ(x). On en déduit que le nombre dφ doit se transformer lors d'un changement de calibration selon la formule :

$$\overline{d\varphi} = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda} = d\varphi - d(\log(\lambda))$$

où la barre horizontale désigne les grandeurs mesurées après le changement de calibration.

Pour terminer d'établir la nature de la connexion métrique, Hermann Weyl a recours au principe de continuité. Tout comme, pour trouver la nature de la connexion affine, il avait posé l'existence d'un système de coordonnées géodésique, ici il va poser l'existence en tout point P(x) de la variété d'une *calibration géodésique*. Celle-ci est telle que la mesure de distance reste inchangée au premier ordre lors du transport de P à P'. Ainsi, avec cette calibration géodésique, on aura :

$$\overline{d\varphi}(\bar{x}, \overline{dx}) = 0 \quad \text{(dans toute direction } \overline{dx}\text{)}$$

En repassant dans une calibration quelconque, Hermann Weyl montre alors que dφ, qu'il va appeler « *la connexion métrique* », dépend de « dx » comme une forme différentielle :

$$d\varphi = \varphi_i dx^i.$$

Laissons Hermann Weyl résumer le tableau final des concepts fondamentaux de cette géométrie infinitésimale pure et de leur nature spatiale :

> Le caractère métrique d'une variété est décrit relativement à un système de référence (système de coordonnées + calibration) par deux formes fondamentales, i.e. une forme quadratique différentielle $Q = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ et une forme linéaire $d\phi=\phi_i\, dx^i$ .Elles restent invariantes lors d'un changement de coordonnées. Si la calibration change, la première forme est multipliée par un facteur λ, qui est une fonction positive de la position admettant des dérivées [partielles] continues ; tandis que la seconde forme est diminuée par la différentielle de log(λ).[254].

[254] Notre traduction de [RZM 1919, 110] :

> *Die Metrik einer Mannigfaltigkeit wird relativ zu einem Bezugssystem* (= Koordinatensystem + Eichung) *charakterisiert durch zwei Fundamentalformen, eine quadratische Differentialform* $Q=\sum_{ik} g_{ik}\, dx_i dx_k$ *und eine lineare* $d\varphi= \sum_i \varphi_i\, dx_i$*; sie verhalten sich invariant bei Übergang zu einem neuen Koordinatensystem ;*

Conformément à l'usage d'aujourd'hui, nous appellerons désormais « espace de Weyl » une telle variété munie de ces deux formes fondamentales $g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ et $\phi_i\, dx^i$.

Courbure métrique:

De manière analogue à la façon dont on construisait « une courbure affine » dans la strate affine de la Nahegeometrie, Hermann Weyl va dériver de la connexion métrique une nouvelle notion qu'on appellera naturellement « courbure métrique ».

Cette courbure mesurera l'écart de comportement entre la notion de distance de l'espace de Weyl étudié et la notion de distance « rigide » d'une Ferngeometrie.

On considère la façon dont est transformée une longueur quand elle est transportée parallèlement autour d'un parallélogramme infinitésimal représenté par :

$$\Delta x^{ij}=dx^{\mu}\delta x^{\nu}-\delta x^{\mu}dx^{\nu}.$$

La définition du transport parallèle d'une longueur et les règles du calcul différentiel montrent que, si on note « l » la mesure de distance initiale, alors la mesure de distance après parcours du parallélogramme infinitésimal vaudra :

$$l+\Delta l= l -l\Delta\phi = l\ (1-\tfrac{1}{2}f_{ik}\Delta x^{ik})$$[255],

où f_{ik} est défini par :

$$f_{ik}=\frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}-\frac{\partial\phi_i}{\partial x^k}.$$

La façon dont nous avons défini un espace de Weyl implique que f_{ik} est un authentique tenseur linéaire (=antisymétrique) du deuxième ordre, donc invariable vis-à-vis d'un changement de calibration. C'est ce qu'on peut appeler avec Weyl la *courbure métrique* de notre espace de Weyl au point considéré.

bei Abänderung der Eichung nimmt die erste einen Faktor λ an, der eine positive stetig- differentiierbare Ortsfunktion ist, die zweite vermindert sich um das Differential von log λ.

[255] Nous avons condensé les résultats de [RZM 1919, 111]

De par sa définition, la « divergence cyclique » de la courbure métrique s'annule :

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial x^j} = 0.$$

La courbure métrique s'annule sur un ouvert de notre variété si et seulement si la notion de longueur se comporte sur cet ouvert comme dans une Ferngeometrie, i.e. si notre espace de Weyl s'identifie à un espace de Riemann sur cet ouvert. Le transport de longueur y est alors une notion intégrable, i.e. indépendante du chemin suivi.

Théorème fondamental de la Nahegeometrie

En suivant *Espace-Temps-Matière,* nous avons développé en deux temps les concepts affines puis métriques qui sont conformes à l'idéal de la Nahegeometrie. Il reste à voir si ces deux strates de la géométrie s'harmonisent adéquatement dans ce nouveau cadre géométrique. Hermann Weyl démontre un théorème[256] qui montre que c'est bien le cas. Nous écrivons son théorème dans un vocabulaire légèrement modernisé :

Théorème fondamental de la Nahegeometrie :

Soit un espace de Weyl (V_n, [$g_{\mu\nu}$], dϕ) :

1) V_n est une variété différentiable (de caractère au moins C^1) de dimension *n*.

2) [$g_{\mu\nu}$] est une classe de formes différentielles quadratiques, modulo une recalibration.

3) dϕ est la forme différentielle qui connecte métriquement notre espace.

Il existe une unique connexion affine Γ telle que tout vecteur transporté parallèlement par cette connexion d'un point P à un point P' conserve « la même longueur »; c'est-à-dire que la longueur du vecteur transporté est égale au transport de la longueur du vecteur initial.

La relation qui détermine univoquement la connexion s'écrit en coordonnées :

$$\Gamma^r_{ik} = \frac{1}{2} g^{rs} \left[\left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} \right) + \left(g_{ir}\phi_k + g_{kr}\phi_i - g_{ik}\phi_r \right) \right]$$

256 [RZM 1919, 111-112]

On peut illustrer ce résultat par l'image suivante : tout comme, dans l'espace euclidien, un vecteur se laisse parfaitement décrire par la donnée de sa *direction* et de sa *longueur*, le transport des vecteurs dans la Nahegeometrie est parfaitement déterminé par la façon dont leurs orientations ($[g_{\mu\nu}]$) et leurs longueurs ($d\phi$) évoluent infinitésimalement dans le passage d'un point à son voisin infinitésimal.

Toutes les notions affines peuvent alors prendre sens au sein d'un espace de Weyl et en particulier, le tenseur de courbure. Quand ce tenseur s'annule sur un ouvert d'un espace de Weyl, on montre que la courbure métrique s'annule aussi. L'espace a donc le comportement d'une Ferngeometrie tant sur le plan affine que sur le plan métrique. L'espace est alors semblable à l'espace euclidien sur cet ouvert.

<u>Décomposition du tenseur de courbure affine :</u>

Dans le cas général, le tenseur de courbure $F^a{}_{bcd}$ va admettre une décomposition naturelle. Nous savons que ce tenseur exprime l'application qui, à tout parallélogramme infinitésimal, associe l'automorphisme linéaire (défini sur l'espace tangent au point P) qui exprime la transformation subie par un vecteur quand il est déplacé le long de ce parallélogramme.

Maintenant que l'espace tangent est muni d'une structure métrique locale, la notion d'orthogonalité y a une signification. On peut alors décomposer la variation $\Delta\xi$ du vecteur ξ par transport le long du parallélogramme Δx, en une composante proportionnelle au vecteur initial et une composante orthogonale au vecteur initial. Bien entendu, la composante proportionnelle exprime le changement de longueur du vecteur tandis que la composante orthogonale exprime son changement de direction.

Hermann Weyl montre que le facteur de proportionnalité de la composante proportionnelle vaut:

$$-\frac{1}{2}\Delta\phi.$$

Le tenseur de courbure affine $F^a{}_{bcd}$ se décompose alors en deux tenseurs. Appliqué au parallélogramme $\mathbf{\Delta x}$ et au vecteur $\boldsymbol{\xi}$, le premier tenseur donne la composante tangentielle de $\boldsymbol{\Delta\xi}$, tandis que le second tenseur donne sa composante orthogonale. Ainsi, le premier tenseur, qu'Hermann Weyl note en coordonnées « $*F^a{}_{bcd}$ », exprime le changement d'orientation quand on se déplace autours du point P. C'est pourquoi Weyl l'appelle « tenseur de courbure directionnelle » Tandis que le second tenseur exprime le changement de longueur. Cette deuxième composante dérive en fait de façon immédiate de la

« courbure métrique » que nous avons vue ci-dessus. En effet, Hermann Weyl montre que la décomposition du tenseur de courbure affine s'écrit en coordonnées :

$$F^{\alpha}_{\beta ik} = * F^{\alpha}_{\beta ik} - \frac{1}{2}\delta^{\alpha}_{\beta} f^{ik}$$

Puisque le vecteur$(* F^{\alpha}_{\beta ik} \Delta x^{ik} \xi^{\beta})$ doit être orthogonal à ξ^{β}, le tenseur *F écrit en composantes covariantes sera antisymétrique non seulement vis-à-vis de i et k, mais aussi de α et β. Quand la courbure métrique s'annule sur un ouvert de la variété, le tenseur de courbure affine s'identifie alors à *F (courbure directionnelle) qui n'est alors rien d'autre que le tenseur de courbure de Riemann. On comprend pourquoi nous disions ci-dessus que le tenseur de Riemann, bien qu'il ne prenne sens que dans un espace métrique, joue plutôt le rôle d'une connexion *des directions* au sens de la Nahegeometrie.

Nous espérons que cette réécriture condensée et modernisée de la construction des « espaces de Weyl » dans les paragraphes 14 à 16 d'*Espace-Temps-Matière* (3ème édition) suffit à montrer comment les nouvelles notions qu'introduit notre auteur suffisent à penser de manière harmonieuse et bien « stratifiée » l'ensemble de la géométrie mathématique selon le programme épistémologique de la Nahegeometrie.

Nous synthétisons tous ces résultats en trois tableaux.

ESPACES INFINITESIMAUX SIMILAIRES	**CONNEXION**	**PRINCIPE DE CONTINUITE**	**COURBURE**
De par l'hypothèse du caractère au moins C^1-différentiable de la variété, l'espace est localement assimilable à son espace tangent. C'est un espace vectoriel de même dimension que la variété. Tous les espaces tangents sont donc isomorphes (linéairement) Leur structure répond à l'axiomatique des espaces vectoriels de dimension n [RZM 1919, 15-16]	L'isomorphie linéaire qui relie l'espace tangent T_P à l'espace tangent $T_{P'}$, pour transporter les vecteurs de P(x) à P'(x+dx) infiniment proche, est donnée par une *connexion* affine Γ. Cette connexion associe à chaque déplacement infinitésimal **dx,** un isomorphisme entre T_P et $T_{P'}$.	Il doit exister un système géodésique de coordonnées associé à chaque point P, dans lequel la connexion s'annule uniformément (i.e. dans toutes les directions **dx**). Ce principe de continuité montre que la dépendance de la connexion à l'égard de **dx** est linéaire et que les coefficients Γ^i_{jk} qui expriment en coordonnées la connexion sont symétriques vis-à-vis de j et k.	La courbure affine exprime l'écart entre la notion de vecteur de notre Nahegeometrie et la notion de vecteur d'un espace affine où elle est intégrable. La courbure affine est un tenseur antisymétrique qui associe à tout à tout élément de surface $\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x}$ en P (parallélogramme infinitésimal), un automorphisme linéaire exprimant la modification $\boldsymbol{\Delta\xi}$ du vecteur $\boldsymbol{\xi}$ lors de son transport le long du parallélogramme. Elle s'exprime en coordonnées : $F^a_{bcd} = \frac{\partial \Gamma^a_{cb}}{\partial x^d} - \frac{\partial \Gamma^a_{bd}}{\partial x^c} + \Gamma^n_{cb}\Gamma^a_{nd} - \Gamma^n_{bd}\Gamma^a_{nc}$ La courbure affine s'annule sur un ouvert de la variété si et seulement si le transport de vecteur y est intégrable, c'est-à-dire si notre espace s'y identifie à un espace affine.

Strate affine de la Nahegeometrie

ESPACES INFINITESIMAUX SIMILAIRES	CONNEXION	PRINCIPE DE CONTINUITE	COURBURE
L'espace est localement assimilable à un espace pseudo-euclidien au sens où les espaces tangents sont munis d'une forme quadratique non dégénérée définie à multiplication près par un facteur de calibration λ. Tous les espaces tangents sont linéairement isométriques, ou plutôt conformalement équivalent (puisqu'on peut changer la calibration).	La connexion est établie en associant à chaque déplacement infinitésimal **dx,** un isomorphisme entre l'espace des longueurs en P(x) et l'espace des longueurs en P'(x+dx). Cet isomorphisme s'exprime, une fois le système de référence (système de coordonnées+calibration) choisi, par le facteur (1-dϕ) par lequel est multipliée la mesure de longueur dans le passage de P à P'. L'expression numérique de la connexion métrique est dépendante de la calibration selon la formule : $\overline{d\varphi} = d\varphi - d(\log(\lambda))$.	Il doit exister une calibration géodésique associée à chaque point P, dans laquelle la connexion dϕ s'annule uniformément (i.e. dans toutes les directions **dx**). Ce principe de continuité montre que la dépendance connexion à l'égard de **dx** est linéaire.	La courbure métrique exprime l'écart entre la notion de longueur de notre Nahegeometrie et la notion de longueur d'un espace de Riemann où elle est intégrable. La courbure métrique est un tenseur antisymétrique qui permet d'associer à tout à tout élément de surface **Δx** en P (parallélogramme infinitésimal) le facteur (1-Δϕ) par lequel est multipliée une mesure de longueur lors de son transport autours du parallélogramme. Elle s'exprime en coordonnées : $\Delta\phi = f_{ik}\Delta x^{ik}$ avec $f_{ik} = \frac{\partial\phi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial\phi_k}{\partial x^i}$. La courbure métrique s'annule sur un ouvert de la variété si et seulement si le transport de vecteur y est intégrable, c'est-à-dire si notre espace s'y identifie à un espace de Riemann.

Strate métrique(/conforme) de la Nahegeometrie

ESPACES INFINITESIMAUX SIMILAIRES	CONNEXION	PRINCIPE DE CONTINUITE	COURBURE
La forme quadratique g définie sur chaque espace infinitésimal (tangent), à multiplication près par un facteur de calibration, définit un élément de longueur : $dl^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ en s'appliquant à des vecteurs (**dx**) qui sont ceux introduits par la structure affine infinitésimale de notre variété différentiable.	On pose le principe de compatibilité entre la connexion affine et la connexion métrique : Un vecteur transporté vers un point infinitésimalement proche doit conserver sa longueur (au sens du transport des longueurs). Le théorème fondamental de la Nahegeometrie nous assure alors l'unicité de la connexion affine compatible avec un espace de Weyl donné. Cette connexion est donnée par : $\Gamma^r_{ik} = \frac{1}{2} g^{rs} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s}\right) \\ +\left(g_{ir}\phi_k + g_{kr}\phi_i - g_{ik}\phi_r\right) \end{array} \right]$	Pour tout point P, il existe un système de référence (système de coordonnées + calibration) entièrement géodésique tel que : 1) Les coefficients de la forme quadratique $g_{\mu\nu}$ s'identifient avec les coefficients $\delta_{\mu\nu}$ d'une métrique euclidienne 2) Les dérivées partielles $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ s'annulent toutes. Cela donne un sens à l'idée que la géométrie euclidienne reste valable sur des distances infinitésimales.	Le tenseur F de courbure (affine) associé à la seule connexion affine compatible avec la métrique admet une décomposition naturelle en deux tenseurs de courbures respectivement « directionnels » et « métriques » qui s'écrivent en coordonnées : $F^\alpha_{\beta ik} =* F^\alpha_{\beta ik} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta f^{ik}$

<u>Relations entre les deux strates</u>

e. Devenir de la notion d'homogénéité dans la Nahegeometrie

Notre reconstruction de la Nahegeometrie dans la partie IV.2.c-d., ainsi que les idées épistémologiques qui la guident entrevues en IV.2.a et IV.1, ont déjà laissé entrevoir que l'expression mathématique de la notion épistémologique d'homogénéité ne disparaissait pas dans la Nahegeometrie, mais se métamorphosait plutôt. Nous avons vu que la fonction épistémique de la notion d'homogénéité permettait de construire un cadre, l'espace(-temps), où chaque sujet-coordonnées joue un rôle similaire, celui d'un point de vue sur le monde dont on doit s'abstraire pour atteindre l'objectivité. De ce fait, le sens que revêt la notion d'homogénéité doit se métamorphoser parallèlement à la nouvelle compréhension de la notion de sujet qu'apporte Hermann Weyl. Etant donné que l'esprit de la Nahegeometrie consiste à insister sur le caractère essentiellement local du sujet, et sur la sphère infinitésimale comme seul domaine légitime de règne pour la raison, cette métamorphose de la notion d'homogénéité doit suivre ce mouvement de localisation. Il va s'agir d'exprimer une indifférence du choix du sujet-coordonnées non pas à l'égard de la description totale des relations du monde, mais uniquement à l'égard des relations qui jouent dans la sphère de l'infiniment proche (Nahe).

Dans la Nahegeometrie, telle qu'elle apparait dans *Espace-Temps-Matière*, on voit s'opérer un dédoublement de la notion d'homogénéité.

La première forme d'homogénéité que l'on trouve concerne uniquement la strate topologique. Ce premier sens de l'homogénéité est le moins « local ». Il s'agit d'exprimer que le système de coordonnées choisi sur l'ensemble de la variété spatio-temporelle, pour rendre compte de ses propriétés topologiques et servir à son traitement analytique, est absolument indifférent à la description objective du monde. C'est ce premier sens de l'homogénéité que nous avions rencontré à la fin de la partie III., en relation avec l'argument de la boule d'argile. Cette homogénéité est celle qui est attribuée à cet « espace en soi » dépourvu de toute forme qui, parce qu'il précède toute relation à la matière, n'est le porteur d'aucune relation métrique[257].

---

[257] Dans [RZM 1919, 87], Hermann Weyl attribue ainsi à Riemann une conception de l'« espace en soi » [Raum an sich] qui rappelle celle d'Albert Einstein à laquelle Weyl adhère :

> Au contraire, il [Bernhard Riemann] affirme que l'espace en soi n'est rien de plus qu'une variété tridimensionnelle sans forme [formlose], et qu'alors le contenu matériel de l'espace l'informe [gestaltet] et détermine ses mesures.

Notre traduction de:

Mais il y a une deuxième forme d'homogénéité qui joue pour les niveaux proprement structurels[258] et en particulier pour le niveau métrique. Il s'agit d'exprimer que la structure *locale* des relations de mesures est la même en tout point de l'espace, et que le mode de connexion d'une structure locale à une autre structure locale de son voisinage est de même partout similaire. L'expression mathématique de cette *homogénéité locale* a été entrevue dans nos paragraphes IV.2.a-d sur le cas particulier des espaces de Weyl. Mais il s'agit de voir qu'il est possible de donner une expression mathématique de cette forme d'homogénéité locale qui a lieu dans une Nahegeometrie, qui précède la donnée de la nature de la métrique. C'est-à-dire qu'on peut exprimer mathématiquement l'homogénéité locale caractéristique d'une Nahegeometrie sans avoir à déterminer si la métrique, comme dans le cas d'un espace de Weyl, est donnée par le biais d'une forme quadratique. Cette possibilité de donner un statut véritablement principiel à l'homogénéité va être la clef pour la résolution par Hermann Weyl de l'analyse mathématique du problème de l'espace.

Dans le paragraphe 18 de la quatrième édition d'*Espace-Temps-Matière,* consacré à cette analyse, Hermann Weyl donne la forme générale du type d'homogénéité qui a lieu dans une Nahegeometrie. Cette homogénéité s'exprime sous une forme *algébrique* à l'aide du concept d'un groupe de transformations opérant *localement*, c'est-à-dire opérant sur les espaces tangents à la variété. Munir une variété (différentiable) *n*-dimensionnelle d'une structure métrique [Metrik] locale en un de ces points P, revient à déterminer, parmi toutes les isométries linéaires définies sur l'espace tangent T_P[259], quelles sont celles qui seront considérées comme des *congruences* (autrement dit des isométries linéaires, des bijections linéaires n'altérant pas la longueur des vecteurs).

L'idée que nous avons exprimée en IV.1., des « espaces infinitésimaux » qui servent de briques élémentaires pour former l'espace global, s'exprime ici algébriquement en déterminant, au sein du groupe des isomorphismes linéaires de déterminant 1 de l'espace tangent T_P dans lui-même, quel est le sous-groupe des transformations congruentes[260]. Ce

er behauptet vielmehr, daß der Raum an sich nichts weiter als eine völlig formlose dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist und erst der den Raum erfüllende materiale Gehalt ihn gestaltet und seine Maßverhältnisse bestimmt.

[258] On a vu plus haut p85 et suivantes, quelques hypothèses pour expliquer pourquoi Hermann Weyl qualifiait de non structurelle la strate topologique. Le traitement à part de l'homogénéité propre à la strate topologique par rapport à celles qui a lieu dans les autres strates plaide encore pour donner un statut particulier à la strate topologique.

[259] Nous modernisons légèrement la présentation. Hermann Weyl n'emploie pas le terme d'« espace tangent » (ni le symbole « T_P ») mais parle du « corps des vecteurs » [Vektorkörper], dans un contexte où on voit que ce corps ne prend qu'un sens local, i.e. dépendant du point de la variété où on le considère.

[260] Hermann Weyl remarque en effet en [RZM 1921, 125] que :

sous-groupe est appelé par Hermann Weyl le « groupe des rotations » [Drehungsgruppe]. On peut conserver ce terme de « rotation » pourvu qu'on se souvienne qu'il prend le sens que nous venons de lui donner. Il s'agit d'une part de voir que le terme « rotation » prend ici un sens local puisque cela concerne les isométries de l'espace tangent T_P et non pas une hypothétique isométrie globale (avec un point fixe) de la variété elle-même. Ce point étant accordé, le terme est également général dans le sens où il ne se réduit pas au sens restreint usuel qu'on lui donne aujourd'hui, quand on le réserve pour les membres du groupe orthogonal O(n) ou du groupe spécial orthogonal SO(n) associés à la structure spécifique d'un espace euclidien. On notera en général G_P le groupe de ces « rotations » au point P d'une Nahegeometrie. Hermann Weyl remarque qu'en plus de sa structure algébrique de groupe, cet ensemble doit également être naturellement considéré comme une variété continue (et même différentiable). Ces deux structures conjointes d'une façon adaptée font de ce groupe de rotation ce qu'on appelle aujourd'hui un groupe de Lie, et qu'Hermann Weyl appelle encore un « groupe continu » [*Kontinuierliche* Gruppe].

Il faut ensuite exprimer algébriquement la notion de connexion métrique [metrischen Zusammenhang], c'est-à-dire relier ensemble les structures métriques locales associées à chaque point de la variété. La structure métrique infinitésimale associée à un point P sera reliée à la structure métrique infinitésimale reliée en un point P' de son voisinage, sitôt qu'on saura, parmi toutes les bijections linéaires de T_P vers $T_{P'}$, celles qui sont considérées comme des *transports congruents* [kongruente Verplanzung] (cette notion étant la généralisation de la notion de transport des longueurs dans un espace de Weyl).

> Une rotation, parce qu'elle doit « laisser inchangé » l'espace tangent [littéralement : le corps des vecteurs], doit évidemment être une application qui conserve les volumes.

Notre traduction de :

> Eine Drehung muß offenbar, da sie den Vektorkörper „nicht verändern" soll, eine volumtreue Abbildung sein.

Ce réquisit peut s'exprimer sans avoir besoin de connaître précisément la nature de la métrique, en posant que le déterminant des applications linéaires congruentes doit valoir 1.

Hermann Weyl ne redémontre pas ce résultat élémentaire d'algèbre linéaire mais se contente de la référence à Grassmann. Il faut noter qu'il se cache sans doute ici un élément qui devrait intervenir dans l'analyse conceptuelle de la notion de mesure : le fait que le volume d'un parallélépipède infinitésimal de dimension n sur une variété de dimension n doit être une forme n-linéaire alternée des n vecteurs définissant le parallélépipède. Laissons ce point.

Dans les termes actuels, les « rotations » associées à un point P de la variété forment donc un sous-groupe du groupe spécial linéaire $SL(T_P)$ associé à l'espace tangent T_P. Une fois une base choisie pour la représentation numérique de T_P, notre « groupe des rotations » est donc un sous-groupe de $SL_n(R)$, le groupe spécial linéaire d'ordre n.

Hermann Weyl remarque que si « A » est un tel transport congruent de T_P vers $T_{P'}$, et si on considère $G \in G_P$, alors l'application (AoG) obtenue par composition de ces deux applications sera elle-même un transport congruent. L'ensemble, que nous noterons « $G_{P \to P'}$ », des transports congruents de T_P vers $T_{P'}$ (pour une connexion métrique fixée) est alors obtenu à partir d'un élément A de l'ensemble par l'opération :

$$G_{P\to P'} \;=\; \{(AoG) \mid G \in G_P\} \;=\; \{(GoA) \mid G \in G_{P'}\}$$

En considérant l'application "A^{-1}", inverse de "A", on obtient en composant une fois de plus, l'application « $A^{-1}oGoA$ » ($A \in G_{P\to P'}$, $A^{-1} \in G_{P'\to P}$, $G \in G_{P'}$) qui doit être un élément de G_P. Ainsi, l'application :

$$A^{-1}o \bullet oA : \qquad G_{P'} \to G_P$$

$$G \to A^{-1}oGoA$$

établit un *isomorphisme de groupe* de $G_{P'}$ vers G_P.

Une Nahegeometrie est ainsi un espace *localement homogène* au sens où les groupes locaux G_p de rotations (P variant sur toute la variété) sont tous isomorphes entre eux. Hermann Weyl précise la nature de cet isomorphisme en montrant que, si on écrit la formule « $A^{-1}oGoA$ » sous forme matricielle, elle est analogue à celle qu'on obtient quand on veut passer d'une matrice G représentant une transformation linéaire, à la matrice représentant la même transformation linéaire dans un nouveau système de coordonnées (la matrice A étant alors interprétée comme la matrice de changement de coordonnées) Hermann Weyl interprète alors ce résultat en disant que :

> De la connexion métrique, il ressort donc que les groupes de rotations associées à deux points P et P_0 ne diffèrent que par l'orientation. Si nous passons continument du point P_0 à n'importe quel point de la variété, nous voyons que les groupes de rotations sont d'un type similaire en tous les points de la variété. Il y a donc homogénéité à cet égard.[261]

---

[261] Notre traduction de [RZM 1921, 126]

> Aus dem metrischen Zusammenhang ergibt sich also, daß die Drehungsgruppe in *P* sich vor in *P_0* nur durch die Orientierung unterscheidet. Und wenn wir stetig vom Punkte *P_0* zu irgend einem Punkte der Mannigfaltigkeit übergehen, so erkennen wir daraus weiter, daß die Drehungsgruppen in allen Punkten des Mannigfaltigkeit von der gleichen Art sind; in dieser Hinsicht herrscht also Homogenität.

On peut ainsi comparer l'homogénéité globale (au sens de Klein) et l'homogénéité locale (au sens de Weyl) dans un tableau récapitulatif :

Une **Ferngeometrie** (géométrie de Klein) est un espace E qui est rigide au sens où il admet un groupe non trivial G ***d'isométries globales***, c'est-à-dire d'homéomorphismes de E dans E qui conservent la distance entre deux points.	Une **Nahegeometrie** (au sens de Weyl) est une variété (différentiable) telle qu'en chaque point P a été défini un groupe de rotations G_P (applications linéaires de T_P dans lui-même considérées comme des ***isométries locales***) et telle que les structures locales G_p et $G_{P'}$, associées à deux points voisins, aient été reliées entre elles par un ensemble $G_{P\rightarrow P'}$ d'isomorphies linéaires de T_P dans $T_{P'}$, considérées comme étant des *transports congruents*.(***connexion métrique***)
Une telle géométrie est ***homogène*** en un sens ***global*** : Le groupe G agit transitivement sur E.	Une telle géométrie est ***homogène*** en un sens ***local*** : Les groupes G_P, $G_{P'}$, … sont tous isomorphes entre eux. Ils diffèrent seulement par un changement d'orientation : $G_{P'} = A^{-1} \circ G_{P'O} A$ (où A est un élément arbitraire de $G_{P\rightarrow P'}$)

f. Devenir du problème de l'espace dans la Nahegeometrie

Une fois caractérisée la notion d'homogénéité qui correspond adéquatement au nouveau cadre de la Nahegeometrie, Hermann Weyl se lance dans ce qu'on peut considérer comme la clef de voute de son système : la résolution du *problème de l'espace* au sens strict du terme. Il s'agit de donner des arguments *a priori* qui déterminent univoquement la nature de la métrique. Celle-ci est une structure locale qui est représentée de façon algébrique, conformément à ce que nous avons présenté au paragraphe précédent, par les groupes de rotations G_P (tous isomorphes). La structure identique de ces groupes, en tant qu'elle caractérise uniquement la sphère *locale* des relations de mesure, est une composante de la notion d'espace comme forme des apparences[262]. Elle se trouve donc dans le domaine de législation de la raison.

[262] [RZM 1921, 127]

Ainsi, la résolution du problème de l'espace proposée par Hermann Weyl aboutit à donner une légitimité *a priori* aux seules géométries qui, comme celles d'un espace de Riemann ou d'un espace de Weyl, laissent invariante une forme quadratique. Il montre donc qu'une telle Nahegeometrie « pythagoricienne » est « la véritable géométrie », c'est-à-dire celle qui fournit le cadre le plus général pour une théorie objective de la mesure, répondant aux exigences de la raison.

Hermann Weyl commence par analyser la façon dont on peut rendre compte de la composition successive de plusieurs *transports congruents.* Ici intervient une nouvelle application du principe de continuité. Hermann Weyl impose que les composantes d'un vecteur lors d'un quelconque transport congruent ne varient pas brutalement. Plus précisément, les variations $d\xi^i$ (i=1…n) des composantes d'un vecteur ξ^i dans le passage de P à P' seront des infinitésimaux du même ordre que le déplacement $\overrightarrow{PP'}$. Ainsi, tout comme l'étude d'un groupe de Lie est ramenée usuellement à l'étude de l'algèbre de Lie formée par les transformations infinitésimales de ce groupe, réduction qui « linéarise » les problèmes, Hermann Weyl nous propose de réduire l'étude des transports congruents en ne considérant que la différence au premier ordre entre la matrice représentant un transport congruent $t \in G_{P \to P'}$ et la matrice identité. Ainsi le vecteur $\boldsymbol{\xi'}=t(\boldsymbol{\xi})$ issu d'un transport congruent du vecteur $\boldsymbol{\xi}$ de P à P' devra s'écrire numériquement :

$$\xi'^i = \xi^i + d\xi^i \text{ avec } d\xi^i = d\lambda^i_k . \xi^k$$

Hermann Weyl montre alors que, de manière similaire à ce qui advient dans un groupe, on peut, à partir de deux transports congruents $M,L \in G_{P \to P'}$ d'expressions infinitésimales respectives « $d\mu^i_k$ » et « $d\lambda^i_k$ », former la rotation $(L^{-1} o M) \in G_P$, admettant l'expression infinitésimale $d\mu^i_k - d\lambda^i_k$. On peut aussi d'une manière générale composer un élément de $G_{P \to P'}$ avec un élément de $G_{P' \to P''}$, en additionnant les matrices infinitésimales qui les représentent[263].

Cette possibilité de décomposer tout transport congruent entre deux points infiniment proches P et P'' en un transport congruent de P à P' suivi d'un transport de P' à P''

[263] Tout ceci se trouve en [RZM 1921, 127]. L'analogie avec ce qu'on appelle de nos jours les groupes et algèbres de Lie est frappante. Cependant, il ne s'agit pas en toute rigueur de cela. En effet, l'inverse d'un élément de $G_{P \to P'}$ n'est pas lui-même dans $G_{P \to P'}$ mais dans $G_{P' \to P}$. De même, les deux éléments composés et le résultat de la composition appartiennent à trois espaces différents : $G_{P \to P'}$, $G_{P' \to P''}$ et $G_{P \to P''}$. Il semble qu'on ait affaire, dans le vocabulaire actuel, à une structure de *groupoïde* au sens de Heinrich Brandt. Par opposition, G_P est par contre un authentique groupe de Lie.

nous permet d'obtenir l'expression la plus générale pour la matrice infinitésimale exprimant un transport congruent de P à P' :

$$d\lambda^i_k = \Lambda^i_{kr} dx^r \text{ où } dx^r \text{ sont les composantes de } \overrightarrow{PP'}$$

$$\text{Autrement dit : } d\xi^i = \Lambda^i_{kr} dx^r \xi^k \qquad \textbf{(*)}$$

Une fois achevée cette analyse conceptuelle des notions de structure métrique infinitésimale (groupe de rotations), de connexion métrique (transports congruents) et de la façon dont on les compose, la solution d'Hermann Weyl au problème de l'espace ne repose alors plus que sur deux axiomes :

<u>Axiome 1 :</u> **La nature de l'espace n'impose aucune restriction à la connexion métrique.**

[C'est-à-dire qu'] Il est toujours *possible* de trouver une connexion affine dans l'espace entre le point P_0 et les points de son voisinage de telle façon que la formule [(*)] représente un système de transports congruents pour *des nombres* Λ^i_{kr} *arbitraires*[264].

<u>Axiome 2 :</u> **La connexion affine est uniquement déterminée par la connexion métrique.**

[Chaque système de n^3 nombres Λ^i_{kr}] doit pouvoir admettre une décomposition d'une et une seule manière conformément à la formule :

$$\Lambda^i_{kr} = A^i_{kr} - \Gamma^i_{kr},$$ [265]

où $A^i_{k1}, \ldots, A^i_{kn}$ est un système de n matrices infinitésimales de l'algèbre de Lie associée à G_P, et Γ^i_{kr} est un système de n^3 nombres vérifiant la symétrie $\Gamma^i_{kr} = \Gamma^i_{rk}$.

---

[264] Notre traduction de [RZM 1921, 127-128] :

I. Das Wesen des Raumes läßt jeden möglichen metrischen Zusammenhang zu.

Möglich ist im Raume demnach ein solcher metrischer Zusammenhang des Punktes P_0 mit den Punkten seiner Umgebung, daß die Formel (69) ein System kongruenter Verpflanzungen nach diesen Nachbarpunkten darstellt *bei vorgegebenen Zahlen* Λ^i_{kr}.

[265] Notre traduction de [RZM 1921, 128, 131] :

II. Der metrische Zusammenhang bestimmt eindeutig den affinen.

[…] muß jedes Λ eine und nur eine Zerlegung nach der Formel

$$\Lambda^i_{kr} = A^i_{kr} - \Gamma^i_{kr}$$

gestatten.

Il est supposé dans l'axiome 2 que le transport parallèle défini par la connexion affine devra être un transport congruent (comme on l'avait supposé de manière spécifique pour les espaces de Weyl dans notre troisième tableau p218, colonne « connexion »). Enfin, l'expression du deuxième axiome oblige Hermann Weyl à présenter, sur le cas particulier du groupe G_P, la façon dont l'étude d'un groupe de Lie peut se ramener à l'étude de son algèbre de Lie[266].

Nous pouvons alors énoncer le résultat de Weyl sur le problème de l'espace. Nous avons esquissé (tableau p223) l'ensemble des géométries infinitésimales [Nahegeometrie] envisageables. Cet ensemble est déterminé à partir des notions algébriques générales de structures métriques locales, de connexion métrique, et à partir des deux principes d'homogénéité locale et de continuité qui leurs sont sous-jacents. Hermann Weyl affirme alors que les seules géométries infinitésimales qui vérifient, en outre, les deux axiomes que nous avons énoncés, sont celles qui laissent invariante une forme quadratique différentielle. On peut exprimer concisément ce résultat en disant que :[267]

Théorème de Weyl pour la résolution du problème de l'espace:

Les seules géométries infinitésimales répondant aux deux axiomes de Weyl sont celles dont la nature de la métrique est pythagoricienne.

---

[266] [RZM 1921, 127-131]

[267] Hermann Weyl n'avait démontré le théorème qui suit à l'époque de [RZM1921] que pour les cas particuliers n=2 et n=3. (Il le rapporte en [RZM 1921, 133]). Il ne parle plus de cette restriction en [RZM 1923]. Dans [Coleman et Korté, 2001], nous apprenons comment divers théorèmes ont été obtenus par plusieurs auteurs pour compléter le travail de d'Hermann Weyl, en fonction des interprétations divergentes de ses intentions.

Le paragraphe 18 d'*Espace-Temps-Matière* ne contient pas la démonstration complète même pour les cas n=2 et n=3. Hermann Weyl juge qu'elle est trop calculatoire et longue pour y avoir sa place. Il donne tout de même les éléments clefs de sa démonstration.

Il y a d'une part une considération combinatoire, qui consiste à évaluer les nombres respectifs des systèmes de nombres possibles Λ^i_{kr}, A^i_{kr} et Γ^i_{kr} intervenant dans la formule de l'axiome 2. Cette combinatoire aboutit à déterminer la dimension de l'algèbre de Lie de G_P (et donc de G_P lui-même) comme valant $\frac{n(n-1)}{2}$.

La formule intervenant dans l'axiome 2 donne ensuite comme propriétés supplémentaires : 1) que les matrices infinitésimales de l'algèbre de Lie de G_P ont une trace nulle, 2) que les doubles-matrices infinitésimales A^i_{kr} ne sont jamais symétriques vis-à-vis de k et r.

Le théorème s'achève en montrant que la seule algèbre de Lie qui vérifie ces propriétés est celle qui correspond aux groupes G_P spécifiques aux métriques pythagoriciennes, c'est-à-dire quand G_p est égal au groupe spécial orthogonal indéfini SO(p,q) préservant une forme quadratique différentielle de signature (p, q). C'est cette dernière partie de la démonstration qui ne figure pas dans *Espace-Temps-Matière*.

Le seul paramètre intervenant pour fixer la nature de la métrique est alors sa signature. La nature de la métrique est par contre entièrement déterminée si on remplace le corps des réels par le corps des complexes (et qu'on adapte en conséquence la notion de Nahegeometrie)[268].

Ce théorème achève brillamment la reconstruction des principes de la géométrie selon la forme d'idéalisme propre à Hermann Weyl, restreinte à la seule sphère restreinte des relations de mesures locales. Ainsi, même si son domaine de législation a été restreint à la sphère locale, la raison y est toutefois parfaitement souveraine au sens où elle détermine univoquement les structures locales de l'espace (groupes de rotation G_p) et le mode général de connexion (affine et métrique) par une analyse du concept d'espace, et par un nombre restreint d'exigences rationnelles *a priori*, précédant tout rapport à l'expérience : les principes d'homogénéité (locale) et de continuité, et les axiomes 1 et 2.

Hermann Weyl voit dans ce théorème le triomphe de cette vision rationaliste de la géométrie (dans ses aspects locaux) :

> […Cela] complète l'analyse de l'espace. Il devrait alors nous être permis d'affirmer que nous avons rendu intelligible la nature de l'espace et la source de la validité du théorème de Pythagore, en ayant exploré les fondements ultimes accessibles au raisonnement mathématique. Si cette conjecture [le théorème de Weyl qui répond au problème de l'espace] ne s'avérait pas exacte, des caractères définis et des propriétés essentielles de l'espace nous aurait encore échappés.

On voit que, même si Hermann Weyl reste prudent quant à l'exactitude de son théorème (démontré à cette époque uniquement pour les cas n=2 et 3), il défend cependant de façon intangible ce que nous avons appelé son « idéalisme transcendantal restreint à la sphère infinitésimale ». Même si ce théorème ne s'avérait pas exact, il devrait de toute manière y avoir selon lui une façon de déterminer univoquement la nature de l'espace par d'autres exigences purement rationnelles encore à découvrir.

Un point crucial de son épistémologie réside dans le fait que cette analyse mathématique du problème de l'espace n'a pu aboutir que grâce à son axiome 1 qui affirme une liberté maximale des connexions métriques possibles à l'égard des structures métriques locales. C'est cette forme de « liberté de raccord » des structures locales entre elles qui donne à la Nahegeometrie son caractère flexible par opposition à la rigidité de la Ferngeometrie qu'Hermann Weyl illustrait par l'image de l'alignement intangible des casernes d'un camp militaire. Alors, seules des lois empiriques exprimant la façon dont le

[268] [RZM 1921, 132]

contenu de l'espace lui donne forme, peuvent achever de déterminer les relations métriques à distance finie, qui sont indéterminées quand considère uniquement « l'espace en soi ».

L'axiome 1 est donc le lointain héritier (sous une forme très généralisée) de la conception riemannienne selon laquelle il faut laisser une liberté maximale à la forme globale que peut prendre l'espace[269]. Le fondement du caractère nécessairement dynamique de la métrique réside chez Weyl dans l'axiome 1, tout comme il résidait chez Riemann dans le choix d'une métrique générale $g_{\mu\nu}(x)$ pour l'espace :

> La possibilité de saisir la position unique de la [structure] métrique pythagoricienne, telle qu'elle a été décrite ici, dépend entièrement du fait que les relations métriques quantitatives sont susceptibles de changements virtuels considérables. Cette possibilité repose entièrement sur le point de vue dynamique de Riemann-Einstein. C'est ce point de vue, dont la vérité peut difficilement être mise en doute après le succès atteint par la théorie de la gravitation d'Einstein (chapitre IV), qui ouvre la voie conduisant à la découverte de la « rationalité de l'espace »[270].

C'est donc paradoxalement chez Hermann Weyl, par un même mouvement épistémologique, celui de l'introduction de l'axiome 1 parmi les principes de la Nahegeometrie servant à déterminer la nature de la métrique, que la raison assoit sa suprématie dans la sphère des structures locales et qu'en même temps elle libère le champ des relations à distance finie à la détermination empirique, ouvrant le domaine à la géométrie physique au sens strict du terme, c'est-à-dire à la détermination empirique des relations *du champ métrique dynamique lui-même.* Ce mouvement est donc à la confluence d'une épistémologie rationaliste de la géométrie comme discipline mathématique qui détermine entièrement la forme générale des relations de proximité par des réquisits rationnels, et d'une épistémologie empiriste modérée à propos des relations de mesure à distance finie, dans le sens où l'expérience (physique) doit venir compléter ce qui est volontairement laissé indéterminé par la raison pure comme hors de sa juridiction.

---

[269] Cf. ce que nous avons dit p130.

[270] Notre traduction de [RZM 1921, 133]:

[…] die Möglichkeit, in der hier geschilderten Weise die einzigartige Stellung der Pythagoreischen Raummetrik zu begreifen, hängt ganz und gar daran, daß die quantitativen metrischen Verhältnisse weitgehender virtueller Veränderungen fähig sind; sie steht und fällt also mit der Riemann Einsteinschen dynamischen Auffassung. Erst diese Auffassung, an deren Wahrheit nach den Erfolgen der Einsteinschen Gravitationstheorie (Kap. IV) kaum mehr ein Zweifel bestehen kann, macht uns die Bahn frei für die Entdeckung der „Vernunft des Raumes".

3. La Nahegeometrie, fondement de la physique des champs

a. La *Nahegeometrie* comme corrélat d'une *Nahe*wirkungsphysik

La composante mathématique du programme de la Nahegeometrie répond à un bouleversement des notions physiques, commencé au XIX^ème siècle, correspondant au passage à une physique des « actions par contact » (plus littéralement des actions « de proche en proche »):

> La transition de la géométrie d'Euclide à celle de Riemann est basée en principe sur la même idée que celle [qui a conduit à] la physique des actions par contact [Nahewirkungsphysik][271].

Cette transition dont parle Hermann Weyl en l'illustrant par le passage d'Euclide à Riemann, vaut d'une manière générale pour le passage de toute géométrie qui suit le schéma général d'une « Ferngeometrie » à une géométrie qui suit le schéma général d'une « Nahegeometrie » au sens que nous avons développé en IV.1. Nous allons à présent développer cette analogie, seulement entrevue jusqu'alors, entre le passage d'une Nahegeometrie à une Ferngeometrie, et le passage d'une physique des actions à distance à une physique des actions par contact. Cette analogie est à prendre en un sens fort du terme. Il ne s'agit pas d'un lointain parallèle mais bien d'un seul et même schéma de pensée épistémologique qui dirige la transition vers une Nahegeometrie et la transition vers une physique des actions par contact. C'est cette analogie qui justifie le choix terminologique du couple Nahe/Fern, (qui signifie littéralement proche/lointain, mais connote aussi les oppositions du fini à l'infiniment petit, et l'opposition des actions physiques *par contact* aux actions *à distance*) C'est aussi cette analogie dont on a parlé pour rendre compte de la structure en 4 parties d'*Espace-Temps-Matière*[272].

---

[271] Notre traduction de [RZM 1919, 81] :

> Der Übergang von der Euklidischen zur Riemannschen Geometrie beruht im Grunde auf dem gleichen Gedanken wie die Nahewirkungsphysik.

[272] Cf. I.3.b. p63 et en particulier la note 91.

Le texte qui suit la précédente citation donne des informations sur la façon dont s'opère la transition à une « physique infinitésimale » au sens où nous avons parlé d'une « géométrie infinitésimale » :

> Nous établissons par l'observation, par exemple, que le courant circulant le long d'un fil conducteur est proportionnel à la différence de potentiel entre les extrémités du fil (Loi d'Ohm). Mais nous sommes convaincus que ce résultat de mesure, appliqué à un long fil, ne nous fournit pas la loi physique exacte, valide en général. [La loi physique exacte] en est plutôt déduite lorsque nous appliquons la loi d'Ohm, telle qu'elle est obtenue [lue] à partir des mesures, à une portion de fil infiniment petite. Alors, nous parvenons à l'expression [renvoi à la formule **s**=σ**E** qui relie le champ électrique au courant électrique dans un conducteur] sur laquelle est fondée la théorie de Maxwell. Par un mouvement inverse, la loi intégrale que nous établissons directement par l'observation peut être obtenue par une méthode mathématique à partir de la loi différentielle, *sous l'hypothèse de conditions partout homogènes*.[273]

Ce passage d'une loi intégrale phénoménale observée immédiatement à une expression infinitésimale qui en est déduite et permet d'atteindre la loi exacte répond à un principe épistémologique primordial :

> *Le principe consistant à comprendre le monde à partir de son comportement dans l'infiniment petit* est le motif épistémologique qui dirige tant la physique des actions par contact [Nahewirkungsphysik] que la géométrie de Riemann […][274]

L'exemple du passage de la loi d'Ohm intégrale[275] à son expression infinitésimale illustre ce que signifie une telle « compréhension du monde à partir de son comportement

---

[273] Notre traduction de [RZM, 1919, 81]:

> Durch die Beobachtung stellen wir z. B. fest (Ohmsches Gesetz), daß der in einem Leitungsdraht fließende Strom proportional ist zu der Potentialdifferenz am Anfang und Ende der Leitung. Aber wir sind überzeugt, daß wir nicht in diesem auf einen langen Draht sich beziehenden Messungsergebnis das allgemein gültige exakte Naturgesetz vor uns haben, sondern dieses aus jenem sich herleitet, indem wir das Ohmsche Gesetz, so wie es aus den Messungen abgelesen wird, auf ein *unendlichkleines* Drahtstück anwenden. Dann kommen wir zu jener Formulierung (Kap. I, S. 68), die der Maxwellschen Theorie zugrunde gelegt wird. Aus dem Differentialgesetz folgt rückwärts auf mathematischem Wege unter *Voraussetzung überall homogener Verhältnisse* das Integralgesetz, das wir direkt durch die Beobachtung feststellen.

[274] Notre traduction de [RZM 1919, 82] :

> - *Das Prinzip, die Welt aus ihrem Verhalten im Unendlichkleinen zu verstehen*, ist das treibende erkenntnistheoretische Motiv der Nahewirkungsphysik wie der Riemannschen Geometrie

[275] Hermann Weyl ne donne pas ici la formule explicitement sous forme symbolique mais la décrit par une phrase. Il s'agit bien sûr de la formule que nous écrivons de nos jours :

$$U=R*I,$$

U différence de potentiel en Volt, I intensité électrique en Ampère, R résistance du conducteur en Ohm.

dans l'infiniment petit ». Nous disposons d'une loi qui n'est qu'approximativement vérifiée, et dont la validité est d'autant plus exacte que la taille du système physique considéré (ici la longueur du fil électrique) est réduite. Notre principe épistémologique nous demande alors de ne poser comme exacte cette loi physique que pour une portion de fil « infinitésimale ».

La possibilité d'exprimer sous une forme infinitésimale exacte la loi approximativement observée à l'échelle phénoménale est permise par les outils mathématiques différentiels, produits du développement du calcul différentiel et intégral. C'est ainsi que, dans le paragraphe 8 d'*Espace-Temps-Matière*, en se plaçant dans le cadre classique de la géométrie euclidienne (ou, si on préfère, de sa géométrie affine sous-jacente), Hermann Weyl reconstruit les opérateurs différentiels les plus fréquents, utiles à l'expression infinitésimale des lois physiques[276]. Ces outils différentiels s'expriment tous dans le cadre de *l'analyse tensorielle* [Tensoranalysis]. Hermann Weyl part de l'opération différentielle de base, c'est-à-dire l'opérateur « dérivées partielles » applicable à un champ de tenseurs, obtenu par généralisation de la notion de *gradient* d'un champ de scalaires. A partir de cet opérateur élémentaire, Weyl reconstruit, sans prétendre à une quelconque exhaustivité, les opérateurs différentiels suivant : le rotationnel d'un champ de vecteurs[277], le tenseur des déformations associé à un champ de vecteurs[278], la divergence d'un champ de vecteurs[279], sa version généralisée qui consiste à différentier puis à contracter un tenseur du

[276] [RZM 1919, 51-54]

[277] Cf. [RZM 1919, 53] A un champ de vecteurs $u^i(x)$, on associe le tenseur antisymétrique à deux indices :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

qui est interprété dans l'analyse vectoriel usuelle comme le *rotationnel* [Rotation].

[278] Cf. [RZM 1919, 54] A un champ de vecteurs $u^i(x)$, on associe le tenseur symétrique à deux indices :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right),$$

qui est interprété comme tenseur des déformations [Verzerrungstensor] quand le champ u_i est interprété comme le champ des vitesses instantanées de la matière répartie continument dans l'espace. Celle-ci se comporte localement en un point P comme un corps rigide si le tenseur s'y annule.

[279] Cf. [RZM 1919, 54] A un champ de vecteurs $u^i(x)$, on associe sa *divergence* qui est le champ de scalaires :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

où on a sous-entendu la sommation sur les indices. Plus généralement, à un (champ de) tenseur(s) du deuxième ordre ayant les composantes mixtes S_i^k, on peut associer le champ de vecteurs :

$$\frac{\partial {S_i}^k}{\partial x^k}.$$

Enfin, à un champ v_{ik} de tenseurs du deuxième antisymétriques, on peut associer la *divergence cyclique* (le terme n'est pas de Weyl) :

$$\frac{\partial v_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial v_{li}}{\partial x^k} + \frac{\partial v_{ik}}{\partial x^l}.$$

second ordre par rapport à un seul de ces indices[272], ou encore l'opérateur de « divergence cyclique »[272] appliqué à un champ de tenseurs antisymétriques doublement covariants.

Tous ces opérateurs différentiels sont les outils naturels pour l'expression des lois physiques infinitésimales qui sous-tendent les lois phénoménales approximativement vérifiées au sens du texte cité ci-dessus. L'exemple de la loi d'Ohm, pris par Hermann Weyl au paragraphe 11, est complexe à analyser en tant que cette loi, même sous sa forme différentielle, n'est pas une loi physique fondamentale. Elle est en effet l'expression d'un mode de rapport complexe entre les particules chargées libres qui composent le courant électrique et les composants matériel de l'élément conducteur[280]. Nous allons donc plutôt illustrer comment ces outils différentiels apportés par l'analyse tensorielle permettent de mettre en œuvre le passage à une physique des actions par contact [Nahewirkungsphysik], par deux autres exemples bien développés dans les paragraphes 8 et §9 d'*Espace-Temps-Matière*[281]*.*

Commençons par l'exemple qu'Hermann Weyl développe explicitement comme une illustration de l'utilisation physique de l'analyse tensorielle. Il s'agit de la modélisation de l'équilibre des forces qui a lieu à l'intérieur d'un corps élastique en repos sous l'effet de deux types de forces différentes : d'un côté les forces extérieures comme la gravitation qui agissent sur les chaque portion de volume du corps, et de l'autre côté les forces internes de cohésion qui sont induites par la distorsion du corps élastique sous l'effet des premières forces. Contrairement aux premières qui s'expriment naturellement de manière immédiate comme des « *forces volumiques* », i.e. agissant sur des portions de volume du corps, les forces internes de cohésion sont dans un premier temps modélisées par des *forces de surfaces* (pression ou tension [Spannungen]). On les appelle couramment en français les « *contraintes* » ou « *efforts internes* » au corps élastique.

[280] La loi d'Ohm est l'expression des interactions entre les particules chargées en mouvement (par exemple, les électrons libres) et la matière du conducteur (par exemple, le fil de cuivre) servant de support au courant électrique. Ce n'est qu'une loi approximativement vérifiée quand on modélise la « résistance » opposée par le conducteur à l'accélération des particules libres, par l'existence d'une vitesse maximale atteinte par les particules chargée, de la même manière qu'un corps tombant en chute libre dans l'atmosphère n'accélère pas indéfiniment mais atteint une vitesse maximale, suite aux frottements de l'air. Ainsi, en tant qu'ils font intervenir la configuration fine de la matière, les phénomènes de la conductivité électrique ne sauraient être exprimés exactement dans la sphère de l'infiniment petit dans toute leur complexité par la simple loi d'Ohm. Cf. [RZM 1919, 68].

[281] Les deux exemples sur lesquels nous appuieront notre analyse sont repris de {RZM 1919, 55-57] pour le tenseur des contraintes d'un corps élastique, et de [RZM 1919, 57-68] pour le passage de la loi intégrale de Coulomb aux lois différentielles de Maxwell dans l'analyse du champ électrique dans le cas stationnaire.

Imaginons une petite portion de volume qu'on abstrait du reste du corps élastique à l'équilibre. Cette portion de volume participant de l'état d'équilibre général du corps, la mécanique élémentaire nous apprend que la résultante des forces qui y sont appliquées est nulle. Ainsi les forces volumiques (gravitation…) qui s'appliquent à ce petit élément de volume sont compensées par les forces appliquées par le reste du corps élastique sur cette petite portion du corps qui en a été abstraite par la pensée. Or, ces dernières forces ne peuvent agir que par contact direct. Ainsi, elles seront modélisées naturellement par une force de surface (pression ou tension) agissant sur la surface extérieure de notre petite portion abstraite de la totalité du corps élastique. Puisqu'on peut détacher par la pensée du corps élastique initial des portions de volumes de plus en plus petits, et dont la surface extérieure admet une direction variable quelconque, les forces de cohésion seront finalement exprimées par la présence, en chaque point du corps élastique, d'une application qui associe à chaque direction possible d'un élément de surface (direction exprimée par le vecteur normal à la surface) la pression/tension appliquée à un tel élément de surface et qui est exprimée elle aussi par un vecteur.

Hermann Weyl considère alors une portion de volume ayant la forme d'un tétraèdre rectangle dont trois arêtes suivent les trois axes cartésiens de coordonnées. Un passage à la limite dans l'écriture de l'équilibre des forces appliquées à un tel tétraèdre de dimensions de plus en plus petites montre que l'application que nous venons de décrire est linéaire. Il s'agit donc d'un tenseur à deux indices qui s'écrira dans les coordonnées cartésiennes : S_{ik}. La force de pression/tension appliquée à un élément de surface $d\Omega^k$[282] est alors donnée par le vecteur covariant $F_i=S_{ki}d\Omega^k$.

Le raisonnement d'Hermann Weyl illustre ainsi comment l'exactitude dans l'expression physique de la loi est ici permise par le passage à l'infinitésimal. L'idée de départ qui dirige la modélisation du phénomène est simple: le corps est à l'équilibre sous l'effet croisé de forces extérieures dépendant du volume du corps et de forces internes s'exprimant par des tensions et des pressions s'exerçant sur les surfaces des éléments composants le corps. Ce n'est cependant que par un passage à la limite (en faisant tendre vers zéro le volume et la surface des éléments de corps élastiques considérés), que cette idée simple a pu trouver son expression mathématique exacte. L'expression infinitésimale, locale, du phénomène a « linéarisé le problème » en désignant comme grandeur fondamentale rendant compte du phénomène d'élasticité : un tenseur doublement covariant.

---

282 Le vecteur contravariant ($d\Omega^k$) qui représente l'élément de surface a comme direction la normale à la surface, et comme norme l'aire (infinitésimale) de l'élément de surface. Il est orienté vers l'extérieur de la surface (à considéré que l'élément de surface considéré sert à composer la surface orientable extérieure d'un élément de volume prélevé sur le corps élastique).

Une fois mis en évidence le tenseur d'élasticité S_{ik}, le raisonnement d'Hermann Weyl se poursuit ainsi. La force F de tension/pression totale appliquée à élément de volume abstrait de notre corps élastique va être obtenue en intégrant S_{ik} sur toute la surface de cet élément :

$$F_i = \int S_{ki}\, d\Omega^k$$

(le vecteur normal $d\Omega^k$ balaie toute la surface)

Le théorème de Gauss permet de transformer cette intégrale de surface (qui est un « flux » à travers la surface extérieure de notre élément de volume[283]) en une intégrale de volume (sur tout le volume du corps) :

$$F_i = -\int \frac{\partial S^k{}_i}{\partial x^k}\, dV$$

On voit ici apparaître l'opérateur « divergence » d'un champ de tenseur doublement covariant vis-à-vis d'un de ces indices. La force de cohésion interne du corps élastique, d'abord exprimée par le biais d'une force de surface (contraintes), admet ainsi une expression sous la forme d'une force volumique. On se retrouve ainsi avec des expressions homogènes pour la force de cohésion et les forces externes (gravitation…). L'écriture de la conservation du moment cinétique et un nouvel emploi du théorème de Gauss permettent alors à Hermann Weyl de démontrer le caractère symétrique du tenseur S_{ik}, finissant de déterminer sa nature spatiale[284].

La fin de ce raisonnement correspond à ce qu'Hermann Weyl appelait, dans le texte cité p. 211, retrouver la loi intégrale à partir de son expression infinitésimale par un processus mathématique d'intégration. Ainsi, l'idée initiale, approximativement exprimée, était celle d'un équilibre au sein d'un corps élastique entre des forces de cohésion internes (contraintes) et des forces externes. Cette idée a trouvé son expression exacte à l'échelle infinitésimale, c'est-à-dire pour une « portion infinitésimale » d'un tel corps. Le raisonnement a en effet montré que le phénomène était correctement exprimé au niveau infinitésimal (local) par un tenseur (« tenseur d'élasticité ») symétrique à deux indices. L'idée de départ, qui concernait un corps élastique de dimension finie trouve alors son expression exacte par un processus mathématique d'intégration à partir de cette expression infinitésimale du phénomène. La loi de Gauss qui est intervenue ici est un de ces théorèmes classiques (avec celui qu'on nomme de nos jours « théorème de Grad-Ostrogradski ») qui

---

[283] Pour ne pas partir dans des considérations topologiques, ici hors de propos, nous supposons implicitement comme Hermann Weyl que l'élément de volume considéré est « sans trou », i.e. simplement connexe, et que sa surface (extérieure) est orientable.

[284] [RZM 1919, 56-57]

jouent un rôle fondamental dans ce processus d'intégration dont parle Hermann Weyl, pour permettre le passage de la sphère infinitésimale à la sphère finie. Ces théorèmes lient entre eux les différents opérateurs différentiels classiques en transformant les unes en les autres les intégrales le long d'un chemin, d'une surface ou d'un volume[285].

Passons au deuxième exemple amplement développé par Hermann Weyl. Il s'agit de la considération des expressions infinitésimales et intégrales des lois de l'électromagnétisme pour un système stationnaire.

On se place dans le cadre d'un système physique (ensemble de corps chargés) stationnaire. Autrement dit, on déplace à l'intérieur d'un système stationnaire, i.e. dont les caractéristiques physiques n'évoluent pas avec le temps, une petite charge qui va se déplacer dans le système. Nous n'aurons pas à considérer ici la présence dans le système de courants électrique engendrant un champ magnétique. On reste ainsi dans le cadre de la première partie du paragraphe 9 d'*Espace-Temps-Matière,* c'est-à-dire dans un système *électrostatique*. On suppose que notre charge-test est suffisamment petite pour ne pas perturber l'équilibre du système. Si la charge du corps-test est notée « e », alors le corps-test subira en chaque point de son déplacement au sein du système physique considéré, une force électrique :

$$\vec{F} = \mathrm{e}.\,\vec{E},$$

où $\vec{E}$ est un champ de vecteurs : l'*intensité du champ électrique* engendré par le système physique considéré (où la charge-test est exclue). Hermann Weyl rappelle la loi de Coulomb qui détermine l'intensité du champ électrique :

$$\vec{E} = -\int \frac{\rho.\vec{r}}{4\pi r^3}\,dV$$

---

[285] Plus précisément, ce qu'Hermann Weyl appelle « théorème de Gauss », dans le passage en question, n'est pas le théorème spécifiquement électrostatique qui affirme que le flux du champ électrique à travers une surface fermée est égal à la somme des charges comprises à l'intérieur de la surface. Il s'agit plutôt du résultat mathématique plus général dont découle ce cas particulier électrostatique. à partir de l'égalité de la densité de charge et de la divergence du champ électrique. Il s'agit de ce qu'on appelle parfois le *théorème de la divergence* ou théorème d'Ostrogradski.

Le théorème de la divergence transforme le flux (intégrale de surface) d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée, en l'intégrale de la divergence de ce champ de vecteur sur le volume enfermé par cette surface.

Quant au théorème de Green, il transforme la circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe fermée en l'intégrale du rotationnel du champ de vecteur sur une surface s'appuyant sur cette courbe fermée.

(l'intégration a lieu sur la totalité du volume de l'espace, ρ est la densité de charge électrique du système physique dans le volume élémentaire dV, $\vec{r}$ est le vecteur qui joint le point où l'intensité du champ électrique est évaluée au point « courant » où est centré l'élément de volume dV, r est la norme de ce vecteur. Nous passons sur les unités choisies implicitement par Weyl).

Cette loi de Coulomb est considérée à juste titre comme une loi intégrale qui exprime la force électrostatique comme une *action à distance* [Nahewirkung] en tant qu'elle relie l'intensité du champ électrique en un point de l'espace à la distribution des charges électriques du système *dans l'espace entier*[286].

Hermann Weyl décrit sommairement le passage de cette loi intégrale aux lois différentielles correspondantes qui sont en fait deux des équations de Maxwell de l'électromagnétisme. C'est la forme particulière de la loi de Coulomb qui permet sa traduction immédiate sous forme différentielle. En effet, le champ électrique $\vec{E}$, de par la forme que lui donne la loi de Coulomb, dérive d'un potentiel ϕ (i.e. s'écrit $\vec{E}=\overrightarrow{grad}$(ϕ), où $\overrightarrow{grad}$ désigne l'opérateur différentiel « gradient ») où ϕ est donné par :

$$-4\pi\phi=\int \frac{\rho}{r}\,dV.$$

Le fait (1) que l'intensité du champ électrique dérive d'un potentiel et le fait (2) que ce potentiel prenne la forme de l'équation ci-dessus impliquent les lois différentielles suivantes:

(1) $\overrightarrow{Curl}(\vec{E})=\vec{0}$

(2) Div $(\vec{E})=\rho$

(où $\overrightarrow{Curl}$ et Div désignent respectivement les opérateurs différentiels « rotationnel » et « divergence »)

[286] Ainsi lit-on en [RZM 1919, 58-59] :

> La loi de Coulomb est la loi d'une action à distance. [Fernwirkungsgesetz]. L'intensité du champ en un point y est exprimée d'une façon dépendante de toutes les charges en tous les autres points, proches ou éloignés, de l'espace.

Notre traduction de:

> Das Coulombsche Gesetz ist ein Fernwirkungsgesetz: in ihm erscheint die Feldstärke an einer Stelle abhängig von den Ladungen an allen andern Stellen, den nächsten und fernsten, im Raum.

Contrairement aux lois de Coulomb, ces lois différentielles n'ont plus du tout un caractère global:

> [Contrairement à la loi de Coulomb], ces formules beaucoup plus simples expriment la loi d'une action par contact [Nahewirkungsgesetz] Etant donné que la connaissance des valeurs d'une fonction dans un voisinage arbitrairement petit autours d'un point est suffisant pour déterminer les dérivées partielles [littéralement : les quotients différentiels] de la fonction en ce point, [nos deux lois différentielles] relient les unes aux autres les valeurs de ρ et de $\vec{E}$ en un point et celles en son voisinage immédiat.[287]

On pourrait objecter à Weyl, pour plus de précision, que seule la seconde des deux lois différentielles exprime une dépendance locale entre le champ et les charges. En fait, la première loi ne dépend pas du tout des charges en présence mais est une « loi structurelle » donnant une propriété générale du champ $\vec{E}$.

Pour comprendre ce qu'implique le passage à une physique des actions par contact, la remarque qui suit dans le texte d'*Espace-Temps-Matière* est plus importante*:*

> Nous devons considérer ces lois d'actions par contact comme la véritable expression de l'uniformité de l'action dans la nature, tandis que nous considérons [la loi de Coulomb] comme un simple résultat mathématique qui en dérive. A la lumière des lois exprimées [par les deux expressions différentielles ci-dessus] qui ont une signification intuitive si simple, nous pensons avoir *compris* l'origine de la loi de Coulomb. Ce faisant, nous nous inclinons face aux exigences de la théorie de la connaissance. Même Leibniz formulait le postulat de continuité, de l'action infinitésimale de proche en proche, comme un principe général, et ne pouvait pas pour cette raison adhérer à la loi de gravitation de Newton qui implique une action à distance et correspond tout à fait à celle de Coulomb[288].

A la suite de ce passage Hermann Weyl fait quelques remarques sur l'harmonie mathématique plus grande obtenue par l'adoption de ce point de vue infinitésimal (au sens des actions de proche en proche), la simplicité mathématiques des lois ainsi obtenues, et

---

[287]Notre traduction de [RZM 1919, 59]:

> Im Gegensatz dazu drücken die viel einfacheren Formeln (51) *Nahewirkungsgesetz* aus: da zur Bestimmung des Differentialquotienten einer Funktion an einer Stelle die Kenntnis ihres Wertverlaufs in einer beliebig kleinen Umgebung dieser Stelle genügt, sind durch (51) die Werte von ρ und **E** an einer Stelle und deren unmittelbarer Umgebung miteinander in Zusammenhang gebracht.

[288] Notre traduction de [RZM 1919, 59] :

> Diese Nahewirkungsgesetze fassen wir als den wahren Ausdruck des in der Natur bestehenden Wirkungszusammenhanges auf, (49) aber nur als eine daraus sich ergebende mathematische Konsequenz ; auf Grund der Gesetze (51), die eine so einfache anschauliche Bedeutung haben, glauben wir zu verstehen, woher das Coulombsche Gesetz kommt. Gewiß folgen wir hier vor allem einem erkenntnistheoretischen Zwang; schon Leibniz hat die Forderung der Kontinuität, der Nahewirkung als ein allgemeines Prinzip formuliert und sich aus diesem Grunde mit dem Newtonschen Fernwirkungsgesetz der Gravitation, das ja dem Coulombschen völlig entspricht, nicht befreunden können.

enfin la simplicité intuitive de la façon dont on peut les interpréter physiquement. Le plus important pour comprendre le passage à une « Nahewirkungsphysik » nous semble cependant se trouver dans le passage que nous avons explicitement cité. Hermann Weyl nous y demande de nous engager ontologiquement d'une manière plus forte à l'égard des lois infinitésimales (locales) comme celles de Maxwell qu'à l'égard des lois intégrales (globales) comme celles de Coulomb. Ces dernières ne sont que des conséquences mathématiques des premières qui, seules, ont un statut fondamental.

Ce type d'engagement ontologique privilégié à l'égard des lois différentielles au détriment des lois intégrales se retrouve sous une autre forme deux pages plus loin. Hermann Weyl y suit un schéma inverse de celui que nous avions reproduit ci-dessus à propos des forces de cohésion dans un corps élastique au repos. En effet, il transforme l'expression de la densité de force électrostatique par unité de volume pour la remplacer par une formule mathématiquement équivalente qui remplace cette force « volumique » par des forces surfaciques de contraintes données par le tenseur symétrique S_{ik}, qu'on pourrait appeler « tenseur de contraintes électrostatiques »:

$$S_{ik}=\frac{1}{2}g_{ik}E_lE^l-E_iE_k$$

C'est ici qu'Hermann Weyl renouvelle sa demande d'engagement ontologique prioritaire à l'égard des lois physiques locales :

> A chaque fois qu'une force $\vec{p}$ peut être ramenée [par la formule $-p_i=\frac{\partial S_i^k}{\partial x^k}$] à des contraintes *S* qui forment un tenseur symétrique du second ordre dépendant uniquement des valeurs des grandeurs physiques décrivant l'état physique au point en question[289], nous devrons considérer ces contraintes comme les facteurs primaires et les actions des forces [seulement] comme leurs conséquences. La justification mathématique de ce point de vue est éclairée par le fait que la force $\vec{p}$ résulte de la différentiation des contraintes. Comparées aux forces, les contraintes sont donc, pour ainsi dire, au niveau de différentiation immédiatement en dessous, et ne dépendent cependant pas de toute la série des valeurs traversées par les grandeurs physiques, comme ce serait le cas pour une intégrale quelconque, mais seulement des valeurs au point en question.[290]

[289] Hermann Weyl fait référence ici au fait que le tenseur des contraintes électrostatiques dépend uniquement de la valeur du champ $\vec{E}$ au point considéré et non pas de ses dérivées ou de la chargé ρ (qui peut être considérée comme une forme de dérivée du champ dans la mesure où elle est égale à la divergence de $\vec{E}$).

[290] Notre traduction de [RZM 1919, 61] :

> Immer wenn eine Kraft *p* sich nach (47) auf Spannungen *S*, die einen symmetrischen Tensor 2. Stufe bilden, zurückführen läßt, welcher nur von den Werten der den physikalischen Zustand beschreibenden Zustandsgrößen an der betreffenden Stelle abhängt, werden wir diese Spannungen als das Primäre, die Kraftwirkungen als ihre Folge zu betrachten haben. Mathematisch erhellt die Berechtigung dieser

Ainsi, que ce soit pour la valorisation des équations de Maxwell au détriment de la loi de Coulomb, ou de la notion de contrainte (pression/tension) électrostatique au détriment de celle de densité volumique électrostatique, Hermann Weyl nous demande d'avoir un engagement ontologique quant au niveau de réalité physique atteint qui va en sens inverse de l'ordre gnoséologique/chronologique dans lequel les notions ont été construites. Si les deux équations de Maxwell (pour l'électrostatique) ainsi que la notion du tenseur de contraintes électrostatiques sont apparues tardivement, par une construction mathématique partant de la loi de Coulomb et de la notion de densité volumique électrostatique, elles doivent cependant être considérées, du point de vue de la réalité physique, comme plus fondamentales.

Cette exigence de donner un engagement ontologique prioritaire aux lois physiques différentielles *locales*, quel que soit le prestige de la tradition de pensée dans laquelle elle se situe (cf. l'appel à Leibniz), peut paraître en partie arbitraire, tant qu'on en reste au cadre stationnaire dans lequel Hermann Weyl a commencé à formuler ces exigences. Selon nous, cette limitation au cas stationnaire est un choix d'Hermann Weyl qui répond à de simples raisons didactiques de progressivité dans la complexité de son discours dans *Espace-Temps-Matière*. Tant qu'on en reste à l'électro*statique*, ou au cas stationnaire en général (si on veut tenir compte aussi de la magnétostatique), la primauté donnée aux lois différentielles sur les lois intégrales semble sans grande conséquence dans la mesure où, pour ce cas particulier, les deux points de vue sont mathématiquement équivalents. Par exemple, Hermann Weyl esquisse[291] comment ont peut retrouver le point de vue intégral des lois de Coulomb à partir des lois différentielles de Maxwell (pour l'électrostatique), pourvu qu'on pose la condition limite selon laquelle le champ électrostatique s'annule quand on s'éloigne infiniment de notre système physique.

C'est dans le passage du cas stationnaire au cas dynamique le plus général, nous semble-t-il, que l'exigence de privilégier les lois différentielles locales acquiert tout son sens. En effet, dans un cas non statique, il devient problématique de vouloir caractériser les valeurs du champ électromagnétique en un point de l'espace, par le biais de la connaissance du système physique (densité de charges électriques ou plus généralement densités de courants électrique) en tous les points de l'espace. En effet, le caractère non stationnaire signifie précisément que la densité de courant électrique est susceptible d'évolution en chaque point de l'espace. On est alors amener à vouloir exprimer les valeurs du champ

Auffassungsweise daraus, daß die Kraft *p* sich aus der Spannung durch Differentiation ergibt ; die Spannungen liegen also gegenüber den Kräften sozusagen um eine Differentiationsstufe weiter zurück und hängen trotzdem nicht, wie es für ein beliebiges Integral der Fall wäre, von dem ganzen Verlauf der Zustandsgrößen, sondern nur von ihrem Wert an der betr. Stelle ab.

[291] [RZM 1919, 58]

électromagnétique en un point et *à un instant donné* à partir de l'ensemble des valeurs du champ de densité du courant électrique *au même instant*. Une telle tentative est tout autant vouée à l'échec, suite à la prise de conscience, par le biais de la théorie de la relativité restreinte, de l'inexistence d'une notion objective de simultanéité à une distance finie. La seule manière non locale, semblable à la loi de Coulomb, d'exprimer les lois de l'électromagnétisme sous forme intégrale consiste alors à introduire des « potentiels retardés » qui prennent en compte le temps de propagation de l'information lors d'un changement de configuration des charges en un point éloigné de celui où on veut caractériser le champ[292].

Ainsi, *dans une configuration électromagnétique non statique, les lois intégrales perdent le caractère de simplicité qu'avait la loi de Coulomb*. Seules les lois différentielles adaptées au cas non stationnaire[293] (qui vérifient l'invariance de Lorentz) conservent la simplicité mathématique d'une loi fondamentale. Dans le cas non stationnaire, le champ $\vec{E}$ n'apparait plus comme un simple intermédiaire de calcul pour exprimer la loi intégrale (comme nous l'avons vu ci-dessus dans l'expression de la loi de Coulomb). Il prend alors un sens physique : il est l'expression mathématique du fait que les interactions électromagnétiques se propagent à vitesse finie. On imagine donc que le champ se trouve en chaque point de l'espace, même là où aucun « corps-test » n'a été placé. On atteint alors la notion *physique* de champ comme une entité s'étendant dans l'espace et qui est porteuse d'interactions dont les effets ne propagent qu'à vitesse finie.

Ainsi, dans le passage du cas stationnaire où forme intégrale et forme différentielle des lois physique se valent, au cas dynamique, le point de vue de la physique des actions par contact [Nahewirkungsphysik] s'impose comme une *théorie des champs* [Feldtheorie] [294] en raison du caractère fini de la propagation de toute action. Bien entendu, cette transition à

---

[292] Pour l'introduction des potentiels retardés et l'intégration des équations de Maxwell dans le cas non stationnaire, nous nous référons au paragraphe 19 de la troisième édition [RZM 1919, 134-142], plus spécifiquement aux pages 137-138.

[293] Dans le passage du cas stationnaire à l'électrodynamique générale, l'équation $\overrightarrow{Curl}(\vec{E})=\vec{0}$ vue ci-dessus doit être remplacée par : $\overrightarrow{Curl}(\vec{E})+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\vec{0}$, ce qui rend compte des phénomènes d'induction électromagnétique. Deux autres lois viennent s'ajouter pour rendre compte du magnétisme. La présentation des quatre lois de Maxwell par Hermann Weyl est tout à fait moderne, semblable à celle qu'on connait de nos jours. Cf. [RZM, 135-136].

[294] La notion de champ est employée abondamment dans *Espace-Temps-Matière*. En revanche, le terme de « théorie des champs »[Feldtheorie] n'apparait qu'une seule fois en [RZM 1919, 172] dans un sens plus radical que celui que nous avons employé ici. En effet, Hermann Weyl l'emploie alors dans le sens d'une théorie physique où la notion de matière cesse d'être fondamentale, le phénomène de la matière étant dérivé de celui du champ, seule entité fondamentale. Une telle théorie physique est donc un monisme ontologique (cf. plus bas en IV.3.b.).

une physique du champ, achevée au XIXème siècle pour le domaine de l'électromagnétisme, est ce qui se joue avec la théorie d'Einstein dans le domaine de la gravitation. Souscrivant à une idée répandue dans l'histoire de la notion de champ, Hermann Weyl voit dans le couplage entre l'idée d'une vitesse finie limite d'interaction, et l'abandon de l'hypothèse de l'éther suite aux expériences similaires à celles de Michelson et Morley[295], la source de la notion physique fondamentale de champ comme une entité remplissant l'espace, ayant une dynamique indépendante de la matière, et soutenant la propagation des interactions. Dans cette histoire de la notion de champ, l'électromagnétisme tel que réécrit sous une forme locale par Maxwell joue le rôle d'un cadre précurseur à cette idée de champ. C'est la théorie de la relativité restreinte qui donne à la notion du champ électromagnétique (comme indépendant de la matière, i.e. indépendant d'un hypothétique éther) le statut d'une entité fondamentale. Enfin, la théorie de la relativité générale tente d'étendre au domaine de la gravitation cette idée d'un champ porteur des interactions.

Revenons alors à l'analogie de départ que posait Hermann Weyl entre le passage de la Ferngeometrie à la Nahegeometrie et le passage de la Fernwirkungsphysik à la Nahewirkungsphysik. Après avoir illustré sur l'exemple de la loi d'Ohm (cf. p211), le passage des lois physiques intégrales aux lois physiques locales, Hermann Weyl continue ainsi :

> C'est exactement la même chose ici : le fait fondamental de la géométrie euclidienne est que le carré de la distance entre deux points est une forme quadratique des coordonnées relatives de ces deux points (*Théorème de Pythagore*). *Mais si nous considérons cette loi comme strictement valide uniquement pour le cas où ces deux points sont infiniment proches, nous entrons dans le domaine de la géométrie riemannienne.* Cela nous dispense en même temps de déterminer les coordonnées d'une manière plus précise puisque la loi de Pythagore, ainsi exprimée, est invariante pour des transformations arbitraires. Le passage d'une géométrie « à distance » [« Fern »-geometrie], celle d'Euclide, à une géométrie « par contact » [« Nahe »-Geometrie], celle de Riemann, correspond au passage d'une physique des actions à distance [Fernwirkungsphysik] à une physique des actions par contact [Nahewirkungsphysik]. La géométrie de Riemann est la géométrie euclidienne formulée de manière à remplir les réquisits de la continuité, et en vertu de cette formulation, elle possède un caractère beaucoup plus général.[296]

[295] Cf. [RZM 1919, 155,196-197]

[296] Notre traduction de [RZM, 1919, 81-82]:

> Genau so hier: Die Grundtatsache der Euklidischen Geometrie ist, daß das Quadrat der Entfernung zweier Punkte eine quadratische Form der relativen Koordinaten der beiden Punkte ist (*Pythagoreischer Lehrsatz*). *Sehen wir aber dieses Gesetz nur dann als streng gültig an, wenn jene beiden Punkte unendlich benachbart sind, so kommen wir zur Riemannschen Geometrie*; zugleich sind wir damit einer genaueren Festlegung des Koordinatenbegriffs überhoben, da das so gefaßte Pythagoreische Gesetz invariant ist gegenüber beliebigen Transformationen. Es entspricht der Übergang von der Euklidischen »Fern«-zur Riemannschen »Nahe«-Geometrie demjenigen von der Fernwirkungs-zur Nahewirkungs-Physik ; die Riemannsche Geometrie ist die dem Geiste der Kontinuität gemäß formulierte Euklidische, sie nimmt aber durch diese Formulierung sogleich einen viel allgemeineren Charakter an.

Ce passage montre bien que, s'il y a bien une analogie entre les deux mouvements, entre le passage de la Fernwirkungsphysik à la Nahewirkungsphysik et le passage de la Ferngeometrie à la Nahegeometrie, ils sont cependant bien deux moments distincts (« moments » étant à prendre dans un sens aussi bien chronologique que génétique) du développement du complexe géométrico-physique. En effet, le passage à une Nahewirkungsphysik tel que nous l'avons présenté avec Weyl dans les pages précédentes, par la naissance des outils différentiels de l'analyse tensorielle, et par le passage de Coulomb à Maxwell dans le domaine de l'électromagnétisme, est né dans un cadre géométrique qui restait celui de la géométrie euclidienne, intégrée au cadre de la physique classique (prérelativiste). Ainsi, l'ontologie du *contenu de l'espace* s'était enrichie ; l'idée d'une matière substance, porteuse des propriétés physiques, étant peu à peu complétée par cette autre notion fondamentale qu'est la notion de *champ*. Mais la nature ontologique de l'*espace lui-même*, au sens de l'ensemble des relations métriques physiquement permises, restait inchangée. De la physique de Maxwell à la physique de la relativité restreinte, les structures de l'espace avaient toujours ce statut d'un cadre rigide posé *a priori* et s'étendant sur la totalité du cosmos, servant de support impassible aux événements physiques qui s'y jouent. C'est cette rigidité et cette impassibilité qu'Hermann Weyl illustre par l'image déjà entrevue plusieurs fois des alignements de casernes dans un camp militaire. C'est souvent Euclide dans les textes d'Hermann Weyl qui est le porte-drapeau de cette vision rigide de l'espace. Sans doute, le caractère « mathématique » de l'espace que Newton appelle de ses vœux dans ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* est un signe fort de l'ancrage de cette vision rigide de l'espace dans la physique classique (à laquelle la théorie de la relativité restreinte n'échappe pas).

Opérer la transition de la Ferngeometrie à la Nahegeometrie, en prenant pour modèle le passage de la Fernwirkungsphysik à la Nahewirkungsphysik, signifie accomplir pour *les structures (métriques) de l'espace lui-même*, ce qu'avait accompli Maxwell pour un domaine du *contenu de l'espace* (l'électromagnétisme).

Il y a deux façons selon nous de comprendre cette analogie proposée par Hermann Weyl.

Dans un premier sens, on peut comprendre que, de même que les lois de Coulomb pour l'électrostatique n'avait pu trouver leur véritable place dans le corps de la physique qu'en se métamorphosant en les équations de Maxwell, pour ne concerner plus que le domaine local *des relations infinitésimales* ; la « loi de Pythagore », c'est-à-dire le fait que la forme des relations métriques possibles dans l'espace soit capturée par une forme quadratique, doit changer de statut et ne concerner plus que le domaine local des relations infinitésimales, pour trouver sa place épistémologique légitime. Cette première interprétation correspond au passage à une géométrie infinitésimale telle que nous l'avons présenté dans notre partie IV.3. Pour juste qu'elle soit, cette lecture ne donne à l'analogie qu'un sens assez faible.

Dans un deuxième temps, on peut lire l'analogie proposée par Hermann Weyl à la lumière de la théorie de la relativité générale qui va prendre en charge la manière dont les relations métriques à distance sont construites par un phénomène d'intégration à partir des lois métriques locales. Pour avoir une lecture forte de cette analogie, il ne faut pas prendre pour terme homologue des équations de Maxwell (lois locales de l'électromagnétisme) uniquement la « loi de Pythagore elle-même », mais bien plutôt les équations d'Einstein (lois locales de la gravitation). En effet, les équations d'Einstein vont jouer pour la gravitation le même rôle que les équations de Maxwell dans le domaine de l'électromagnétisme. De même que les équations de Maxwell reliaient la variation locale du champ électromagnétique à la présence de courant électrique, les équations d'Einstein relient la variation locale du champ gravitationnel à la présence d'une masse en mouvement (énergie-impulsion).

En raison de l'identification einsteinienne de la gravitation avec les propriétés inertielles qui se traduisent par une modification de la métrique, les équations d'Einstein sont les lois différentielles qui expriment comment se connectent une structure métrique locale à ses voisines en fonction du contenu de l'espace-temps en terme d'énergie-impulsion au point de l'espace-temps considéré. La structure métrique de l'espace-temps dès qu'on sort de la sphère strictement infinitésimale, devient donc un *champ* $g_{\mu\nu}$ ayant un statut physique au même titre que le champ électromagnétique. La loi de la gravitation de Newton découle en première approximation (pour un corps-test se déplaçant à une vitesse réduite, dans un champ de gravitation faible) des équations d'Einstein pour un système physique gravitationnel stationnaire. L'écart existant cependant entre, d'une part, la dynamique d'un corps-test placé dans un espace-temps solution des équations d'Einstein pour un seul corps ponctuel sans rotation (solution de Schwarzschild) et, d'autre part, la dynamique d'un corps-test placé dans un champ de gravitation newtonien engendré par une masse ponctuelle, suffit à rendre compte de l'avancée du périhélie de la planète Mercure.

Quand on passe au cas non stationnaire, il faut alors tenir compte de la propagation à vitesse finie des interactions gravitationnelles tout comme nous l'avons fait pour les interactions électromagnétique dans le passage à l'électrodynamique. Le champ $g_{\mu\nu}$ devient un authentique *champ dynamique* dont les propriétés structurelles fluctuent au grès de l'évolution de la répartition de la matière, toute modification de la répartition de la matière engendrant une déformation de la métrique qui se déplace à vitesse finie (par exemple, sous forme d'ondes gravitationnelles).

Finalement, la transition à une Nahegeometrie, sur le plan physique, signifie qu'on a donné aux relations métriques $g_{\mu\nu}$ elles-mêmes le statut d'un champ physique dynamique, au même titre que le champ électromagnétique qui contribue à caractériser le contenu de l'espace. Selon un schéma semblable à celui que nous avions vu dans la partie III. à propos du passage *d'Espace-Temps-Matière* sur l'argument de la boule d'argile, Hermann Weyl associe étroitement les deux interprétations que nous venons de présenter quant à l'analogie entre la Nahewirkungsphysik et la Nahegeometrie. Selon une première interprétation de l'analogie qui donne un sens purement mathématique à la Nahegeometrie, celle-ci est devenue « locale » au sens tout simplement où elle ne pose comme point de départ que la structure infinitésimale (loi de Pythagore), les relations à distance finie devant être obtenue par intégration. Mais, comme l'avait montré Riemann, la façon dont cette intégration s'opère n'est pas déterminable par la raison pure. Le recours à la physique est indispensable. Cela nous a donc conduit à une seconde interprétation de notre analogie qui donne à la notion de Nahegeometrie un sens physique. Selon cette seconde interprétation, la géométrie devient « Nahegeometrie » sitôt qu'elle ne pose comme point de départ que la façon dont les propriétés structurelles locales de la métrique sont dépendantes du contenu de physique de l'espace-temps au point considéré. Ces lois différentielles de la gravitation sont les équations d'Einstein qui, comme les équations de Maxwell, sont des équations différentielles. Les propriétés métriques sur une portion finie d'espace-temps doivent alors être obtenues par une intégration qui tient compte du caractère généralement hétérogène et dynamique de la répartition de l'énergie-impulsion dans l'espace-temps.

Ainsi, la Nahegeometrie apparait de ce point de vue comme une seconde étape qui consiste à compléter le passage à la Nahewirkungsphysik en traitant la métrique de l'espace comme avait été traité le contenu de l'espace dans l'étape précédente. Le fait de compléter le passage à une Nahewirkungsphysik par le passage à une Nahegeometrie va s'exprimer par une nouvelle mutation des outils de la géométrie. La Nahewirkungsphysik avait pu s'exprimer par la naissance et le développement des opérateurs différentiels (dérivées partielles, gradient, divergence, rotationnel…). La Nahegeometrie va poursuivre la mutation des outils différentiels en tenant désormais compte su fait que ces outils ne peuvent plus s'appuyer sur une structure métrique immuable (celle de l'espace euclidien) mais doivent s'exprimer dans le cadre d'un espace lui-même défini de manière infinitésimale. L'ancien opérateur différentiel primitif, l'opérateur « dérivées partielles » sur une espace euclidien, doit être remplacé par l'opérateur « dérivées covariantes » qui s'appuie sur la nature courbe de l'espace-temps (ou sur la nature dynamique de l'espace si on préfère). Les autres opérateurs différentiels mutent corrélativement pour prendre un caractère covariant, en s'appuyant sur les valeurs locales de la connexion. Les anciens opérateurs différentiels, qui décrivaient le comportement local d'un champ lui-même défini sur un espace aux propriétés non locales, sont remplacés par les nouveaux opérateurs qui décrivent les comportements locaux de champs eux-mêmes définis sur une variété riemannienne, c'est-à-dire sur un espace qui a un caractère tout aussi dynamique que son contenu.

Il faut, pour poursuivre l'analogie, se demander quel est le mouvement d'intégration (au sens mathématique du terme) qui va permettre de connaître les relations métriques à distance finie à partir des relations infinitésimales, tout comme les lois physiques non locales ont pu être reconstruites par intégration à partir des lois locales. Nous avons vu que les lois simples de Coulomb n'étaient retrouvées par intégration que dans le cas limite d'un système physique stationnaire ou tous les paramètres physiques sont fixés pour tous les temps. Le cas général devenait plus complexe en raison de la dynamique *à propagation finie* des interactions. De même, la loi d'Ohm intégrale n'était retrouvée à partir de la loi intégrale qu'à condition que l'on soit « *sous l'hypothèse de conditions partout homogènes* »[297].

b. Vers un monisme ontologique des champs et une géométrisation de la physique

Nous allons terminer ce travail en disant quelques mots sur les nouvelles théories physiques qui apparaissent dans *Espace-Temps-Matière* en se greffant sur le programme de la Nahegeometrie, et qui évoluent parallèlement à la conception de la matière par Hermann Weyl avant d'être progressivement abandonnées. Le traitement rigoureux et détaillé de ces théories demanderait que nous développions le problème de la matière, le second grand problème qui guide Hermann Weyl dans *Espace-Temps-Matière* après le problème de l'espace. Etant donné la problématique que nous avons choisie, nous avons mis de côté ce deuxième problème qui mériterait un travail conséquent à lui tout seul. Le fait même que ces théories physiques aient été abandonnées par Hermann Weyl, a contrario de sa conception de l'espace(-temps), est une preuve de la relative indépendance des deux problèmes. Etant donné la façon dont ces thèses physiques avortées s'harmonisent parfaitement avec les thèses de la Nahegeometrie (sans toutefois en découler nécessairement), nous nous devions d'en esquisser tout de même les grandes lignes et de renvoyer à la littérature pour leur traitement détaillé.

La première hypothèse physique nouvelle à apparaître dans *Espace-Temps-Matière* est celle de l'unification géométrique du champ électromagnétique avec le champ gravitationnel. Conformément à ce que nous avons annoncé dans notre présentation du volet physique de la Nahegeometrie, Hermann Weyl a voulu unifier d'une manière plus harmonieuse que ne l'avait fait Einstein les lois de l'électromagnétisme avec celles de la gravitation, en proposant une théorie où les deux types d'interactions sont de nature géométrique, alors que seule la gravitation l'était dans la théorie de la relativité générale.

[297] Cf. le texte que nous avons cité p230.

Expliquons plus en détail ce que cela signifie. Dans la théorie de la relativité générale, les phénomènes gravitationnels se laissent complètement exprimer par la façon dont le champ métrique est déterminé par la matière (équations d'Einstein), une fois posé l'hypothèse fondamentale selon laquelle les corps graves suivent les géodésiques de l'espace-temps. Ainsi, en tant que les phénomènes gravitationnels se manifestent par la seule courbure de la métrique spatio-temporelle, on peut affirmer qu'ils sont de nature *géométrique,* en donnant à ce terme le sens de la géométrie physique comme étude de l'objet physique : champ métrique dynamique. Ainsi se trouvent identifiés géométrie physique et théorie de la gravitation. Si on laisse de côté la physique des particules, alors l'autre grand domaine de la physique de l'époque, l'électromagnétisme, ne trouve pas sa place dans la théorie d'Einstein de la même façon. Les phénomènes électromagnétiques ne s'y manifestent pas comme une interaction entre la matière et le champ métrique mais plutôt par le biais d'une force (la force électromagnétique) qui dévie les éléments de matière électriquement chargés de leurs « trajectoires naturelles » que sont les géodésiques spatio-temporelles, c'est-à-dire les trajectoires qu'auraient ces corps s'ils étaient dépourvus de charge.

Ainsi, dans la théorie d'Einstein, quelque chose subsiste de l'idée classique de l'« inertie » dans le sens d'un mouvement naturel susceptible d'être perturbé par l'intervention d'une force. Dans la physique newtonienne, on distingue en effet les mouvements inertiels des mouvements influencés par une force. Les mouvements inertiels sont ceux des corps isolés, sur lesquels les autres corps n'ont d'influence. Ces corps suivent alors une trajectoire rectiligne uniforme par rapport à l'espace et au temps absolus newtoniens (1ère loi de Newton). Par opposition, les corps soumis à une force, que cette force soit de nature gravitationnelle ou autre, ont un mouvement accéléré vis-à-vis de l'espace newtonien (2ème loi de Newton). Dans la théorie d'Einstein, on ne peut penser un corps soumis à aucune influence. Ce sont les mouvements des corps soumis à la seule influence gravitationnelle, exprimée par l'intermédiaire du champ métrique, qui jouent le rôle d'un mouvement « naturel » ou « inertiel ». Par opposition, un corps soumis à une autre force que la force gravitationnelle (et seule la force électromagnétique pouvait clairement prétendre à cette époque être une force *fondamentale* différente de la gravitation) a un mouvement accéléré vis-à-vis du champ métrique local. C'est-à-dire que son mouvement dévie par rapport aux géodésiques spatio-temporelle.

C'est à cette asymétrie dans la théorie d'Einstein entre phénomènes gravitationnels et phénomènes électromagnétiques que la tentative d'unification géométrique des champs d'Hermann Weyl tente de mettre fin. L'espoir d'une telle géométrisation naît très rapidement après qu'Hermann Weyl soit parvenu à l'élaboration de sa géométrie infinitésimale pure. Il remarque en effet que le nouvel objet géométrique apparaissant dans un espace de Weyl, la connexion métrique, possède certaines propriétés formelles du 4-potentiel électromagnétique $\phi_i(x^\mu)$. Tous les deux en effet sont des formes linéaires. De plus, le tenseur de courbure métrique f_{ik}dérive de la connexion métrique ϕ_i par l'opérateur « rotationnel » :

$$f_{ik} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \phi_k}{\partial x^i}$$

de la même manière que le tenseur électromagnétiques F_{ik} dérive du quadripotentiel électromagnétique A_i :

$$F_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}.$$

Hermann Weyl développe alors une théorie[298] physique qui généralise celle d'Einstein. Il s'agit de remplacer le cadre d'un espace de Riemann, sous-jacent à la théorie d'Einstein par un espace de Weyl. La forme quadratique $[g_{\mu\nu}]$ (considérée à une recalibration près) joue alors le rôle du potentiel gravitationnel, comme dans la théorie d'Einstein, tandis que la connexion métrique ϕ_i joue le rôle du quadripotentiel électrostatique. La théorie de Weyl donne les mêmes lois du mouvement que celle de Maxwell dans une situation où il n'y a pas de gravité (espace plat), mais elle donne par contre des lois qui ne sont qu'approximativement celles d'Einstein lorsque on fait circuler des particules non chargées[299]. On voit ainsi que les deux théories diffèrent du point de vue des prédictions.

La deuxième innovation physique dans *Espace-Temps-Matière* est la façon dont Hermann Weyl poursuit le programme de Gustav Mie de réduction de la matière aux champs[300]. Il s'agit d'ôter à la matière son statut d'entité fondamentale et de la réduire à un épiphénomène du champ. Si une telle réduction réussissait, l'ontologie dualiste matière/champ qui s'était imposée depuis l'avènement de l'électromagnétisme (notamment par les travaux de James Clerk Maxwell) serait remplacée au profit d'un nouveau monisme ontologique du champ. La difficulté principale de cette réduction consiste en l'explication de la nature granulaire de la matière. Il faudrait pouvoir ramener la notion discrète de particule à la notion continue d'une région de l'espace-temps où la concentration en énergie est importante de même que la densité de charge (typiquement : un électron), et de telle sorte que ce point de concentration soit (au moins statistiquement) stable. Les lois de l'électromagnétisme telles qu'elles apparaissent dans les travaux de Maxwell ne peuvent expliquer la stabilité d'un tel grain de concentration d'énergie. Gustav Mie avait tenté de résoudre le problème en modifiant les lois de l'électromagnétisme par un changement qui

[298] [RZM 1919, 242-253]

[299] [Weyl 1918c] dans [GA 40]

[300] [RZM 1919, 175-184]

n'affecte les phénomènes que sur de petites distances de l'ordre de la taille des particules. C'est ce programme que reprend Hermann Weyl pour l'adapter au nouveau cadre qui est apparu avec la théorie de la relativité générale. Si un tel programme réussissait, de manière combinée avec l'unification géométrique de l'électromagnétique et de la gravitation, on parviendrait ainsi à réduire *toute* la physique au niveau fondamental à la description de la dynamique d'un champ métrique (au sens d'un espace de Weyl).

Les deux innovations physiques que nous venons de présenter successivement sont toutes les deux abandonnées progressivement à partir de la 4ème édition d'*Espace-Temps-Matière*. En raison du caractère secondaire, *pour nous*, du problème de la matière, nous ne proposons pas de nouvelle interprétation des raisons pour lesquelles Hermann Weyl a abandonné ces thèses. Nous synthétisons seulement ce que nous avons trouvé dans la littérature secondaire. D'abord, concernant la réduction de la matière à la notion de champ, Hermann Weyl ne parvenait pas à expliquer de manière entièrement satisfaisante la nature granulaire de la matière, malgré l'avancée permise dans cette direction par la théorie de Mie par rapport à celle de Maxwell. Le doute a alors germé dans l'esprit d'Hermann Weyl sur la possibilité d'une telle réduction. D'autre part, Norman Sieroka[301] montre comment le dualisme champ/matière convenait de mieux en mieux à Hermann Weyl alors qu'il développait sa théorie de la matière-agent, pour des raisons qui semblent déborder les considérations purement physique. La multiplication des découvertes concernant le comportement quantique de la matière, et enfin l'avènement de la mécanique quantique comme une théorie achevée et reconnue dans les années 1925, n'ont fait qu'entériner définitivement le basculement déjà commencé par Hermann Weyl d'une théorie de la matière comme notion dérivée du champ, à une notion de matière primitive et indépendante.

Concernant le programme d'unification géométrique de l'électromagnétisme avec la gravitation par le biais d'un espace de Weyl, il faut savoir qu'il avait été très mal reçu par Albert Einstein. Ce dernier reprochait à Weyl l'aspect trop spéculatif de sa démarche, et pensait que l'expérience pouvait réfuter immédiatement la théorie d'Hermann Weyl. Ce dernier répliquait en refusant l'interprétation d'Einstein, jugée simpliste, de la façon dont on doit théoriser le comportement des horloges et des règles dans espace de Weyl. La polémique qui s'en ait suivi n'a abouti qu'à une immobilisation des deux partis[302]. Peut-être Hermann Weyl n'a-t-il alors jamais vraiment abandonné son hypothèse. Se trouvant isolé pour en tester la validité, et étant plutôt intéressé par le problème de la matière, il aurait semble-t-il délaissé petit à sa théorie quand il fut convaincu qu'elle ne pouvait plus servir à

---

301 [Sieroka 2007]

302 Cf. Notamment les échanges entre Albert Einstein et Hermann Weyl publiés à la suite de [Weyl 1918c] en [GA 40-42].

résoudre le problème de la réduction de la matière au champ. Ainsi, les abandons des deux nouvelles théories physique seraient peut liés entre eux. Nous renvoyons le lecteur à la littérature pour un véritable développement de ce problème.

4. Annexe
Comment caractériser la nature spatiale d'une grandeur dans un espace de Weyl?

Ce que nous avons dit dans notre annexe II.5. sur la caractérisation de la nature spatiale d'une grandeur physique doit être complété sitôt qu'on se place dans le cadre d'un espace de Weyl où, comme nous l'avons vu, une autre composante subjective s'ajoute, en plus du système de coordonnées, pour permettre la représentation numérique des grandeurs. Il s'agit de la calibration [Eichung].

Le système de coordonnée seul est alors remplacé par un système de référence [Bezugssystem], c'est-à-dire un système de coordonnées *associé à un facteur de calibration* en tout point de la variété[303]. Un changement de système de référence dans un espace de Weyl est donc un changement de coordonnée $(x \rightarrow x') \in G$ (difféomorphisme local) associé à un changement de calibration représenté par un facteur λ fonction positive continue (suffisamment différentiable) du lieu. Notons « L » l'ensemble des fonctions λ possibles. En définissant naturellement la multiplication dans L par :

$$\lambda * \lambda' =_{def} \qquad x \rightarrow \lambda(x) * \lambda'(x),$$

on munit L d'une structure de groupe. Le groupe des changements de système de référence est alors tout simplement le produit direct G*L du groupe G (des changements de coordonnée) par le groupe L (des changements de calibration).

La nouvelle définition de la nature d'un objet spatial s'en déduit naturellement. Un objet spatial sera donné par :

1) L'ensemble C des représentations numériques qu'il est susceptible de recevoir.
2) La façon dont la représentation numérique de cet objet varie quand on passe d'un système de référence à un autre. C'est-à-dire qu'il va falloir préciser une *action de groupe* du groupe G*L sur l'ensemble C.

303 [RZM 1919, 110]

Hermann Weyl n'explicite pas tout cela mais se contente d'exemples (qui se passent du vocabulaire des actions de groupe).

Exemple : Nature spatiale d'un vecteur contravariant de poids « e » associé à un point P de notre espace de Weyl.

Le groupe G des changements de coordonnées est ici l'ensemble des difféomorphismes locaux ($x \rightarrow x'$) de classe C^1 sur la variété sous-jacente à notre espace de Weyl.

L'ensemble C des représentations numériques possibles d'un tel vecteur est l'ensemble R^n (n dimension de la variété sous-jacente à l'espace de Weyl)

Lors d'un passage d'un système de référence à un autre, la représentation numérique d'un tel vecteur varie selon l'action de groupe :

$$(G*L) \times C \rightarrow C$$

$$\left([(x \rightarrow x'), \lambda], \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix}\right) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial x'^1}{\partial x^1}(P) & \dots & \frac{\partial x'^1}{\partial x^n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'^n}{\partial x^1}(P) & \dots & \frac{\partial x'^n}{\partial x^n}(P) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix} * \lambda^e$$ [304]

[304] [RZM 1919, 114]

CONCLUSION

Les thèses que nous avons soutenues tout au long de ce travail pour penser l'unité de la philosophie l'espace-temps d'Hermann Weyl ont été synthétisées en introduction. Aussi, nous allons plutôt, dans cette conclusion, esquisser les lignes de recherche qui s'ouvrent à la sortie de notre travail. Ces problèmes ouverts sont soit d'ordre historique, liés à la compréhension de la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl et à la restitution de son devenir au cours du vingtième siècle, soit des problèmes plus authentiquement épistémologiques concernant les difficultés que rencontre le programme de la Nahegeometrie pour des raisons internes ou pour des raisons qui tiennent au développement des sciences de l'espace après l'époque d'*Espace-Temps-Matière*.

Première ligne de recherche ouverte :
le rapport de la sensibilité avec les principes *a priori* de
l'analyse mathématique du problème de l'espace

Ce premier axe de recherche est de nature philosophique et historique. Il tient à la compréhension de la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl où nous relevons une zone d'ombre qui a résisté à nos investigations. Nous pensons que cette résistance est due à de réelles tensions au sein de la pensée d'Hermann Weyl qui ne nous semblent pas résolues au sein d'*Espace-Temps-Matière* et demanderaient sans doute une étude plus large du corpus d'Hermann Weyl.

Nous avons fait allusion à ce problème plus haut (IV.1.d. p190). Il s'agit du problème philosophique visant à caractériser exactement le statut des principes rationnels qui sont invoqués par Hermann Weyl dans son analyse mathématique du problème de l'espace. La seule chose qui nous semble bien établie dans *Espace-Temps-Matière* à propos de ces principes est leur statut rationnel[305], qui nous permet de fixer la nature de l'espace préalablement à toute expérience. En revanche, la position d'Hermann Weyl nous semble flottante quand aux facultés de la raison mises en jeu pour justifier les principes intervenant dans le processus de détermination de la nature de la métrique. On sait comment l'idéalisme transcendantal originel, celui d'Immanuel Kant, était fondé sur une thèse importante : les propositions de la géométrie ne sont pas analytiques, c'est-à-dire ne reposent pas seulement sur les règles de l'entendement par le biais de la logique, mais font intervenir aussi l'espace comme une forme a priori *de notre sensibilité*. Or, il est remarquable que, si Hermann Weyl

[305] Ici rationnel est employé au sens large de l'ensemble des facultés qui permettent de fournir une connaissance *a priori*. « Raison » [Vernunft] est souvent employé en ce sens par Hermann Weyl.

reprend à son compte dans *Espace-Temps-Matière* le terme de « forme de notre intuition » [Form unserer Anschauung] ou de « forme des apparences » [Form der Erscheinungen] (avec un sens nouveau), le terme kantien de « forme de notre sensibilité » [Form der Sinnlichkeit] y est en revanche absent. C'est sans doute un signe, avec la disparition de la notion de sujet transcendantal, de la prise de recul d'Hermann Weyl, malgré la forme d'idéalisme qu'il défend, par rapport à l'idéalisme transcendantal originel de Kant. Il y a donc selon nous dans *Espace-Temps-Matière* de nombreux signes d'un problème philosophique qui préoccupe Hermann Weyl concernant les rapports entre la sensibilité et les principes *a priori* qu'il défend dans sa philosophie de l'espace-temps. Il n'y a en revanche pas de trace d'une solution arrivée à maturation. Peut-être cette absence de solution a-t-elle un rapport qu'il resterait à établir avec la mise entre parenthèse par Weyl de ce qu'il appelle le « problème philosophique de l'espace » et du lien non élucidé entre le continu intuitif et le continu mathématique dans son autre grande monographie, *le Continu*.

Deuxième ligne de recherche ouverte :
la comparaison avec le programme d'Elie Cartan,
le traitement des problèmes géométriques globaux
dans une Nahegeometrie, et la place de la cosmologie.

Il faut remarquer que le type de géométrie appelé par l'épistémologie de la Nahegeometrie, à savoir une géométrie différentielle qui prend pour base une variété différentiable et met en avant la notion mathématique de connexion, est devenu un cadre de travail tout à fait classique dans la géométrie pratiquée au cours du 20ème siècle et en ce début de 21ème siècle. Cependant, dans la communauté actuelle des mathématiciens, la formulation d'Hermann Weyl pour une telle géométrie côtoie celles d'Elie Cartan ou de Charles Ehresmann, basées sur des notions topologiques plus élaborées comme celles de fibration, d'espace fibré, de faisceaux, etc.

Le fait qu'un autre grand mathématicien, Elie Cartan, contemporain d'Hermann Weyl, ait développé un programme de reconstruction de la géométrie qui parte d'une problématique très proche, visant à faire communiquer les deux grandes traditions de la géométrie que sont le programme d'Erlangen (et les géométries homogènes) et la tradition analytique de la géométrie différentielle, suffit à indiquer qu'il serait hautement profitable, pour mettre en valeur les avantages et les défauts de la pensée géométrique d'Hermann Weyl, de procéder à une étude comparée aussi bien des concepts géométriques mis en place par ces deux auteurs, que des réflexions épistémologiques qui guident les deux approches. Récemment, Erhard Scholz a commencé à explorer cette voie[306].

[306] Cf. "H.Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s", à paraitre dans *Boletim da Sociedada Portuguesa de Matemàtica*.

Nous pressentons (cela reste donc à vérifier) que les notions topologiques mises en valeur dans la version d'Elie Cartan et de Charles Ehresmann de la notion de connexion, permettent un traitement plus clair des questions « globales » qui se posent en géométrie différentielles. Par « questions globales », nous entendons comme c'est l'usage, les questions géométriques qui se posent lorsqu'on considère dans leur totalité les structures qui sont définies sur notre variété. Il est notable que ces questions géométriques « globales » sont absentes d'*Espace-Temps-Matière*. Hermann Weyl se préoccupe évidemment de la façon dont les structures sur une portion finie d'espace sont engendrées dans une Nahegeometrie par un processus d'intégration à partir des structures infinitésimales. En revanche, il ne prolonge jamais (ou presque) le processus d'intégration jusqu'à construire et interroger la structure globale de l'espace-temps. Cette lacune n'est peut être pas anodine. En effet, on peut se demander si il y a la place pour de telles questions globales dans une géométrie fondée sur une épistémologie où seules les relations infinitésimales sont fixées *a priori* et où les autres relations doivent être construites par un processus d'intégration qui fasse intervenir *le rapport à l'expérience* et les lois d'interaction de la matière.

La problématique épistémologique ici apparente est celle de la possibilité d'une expérience de la structure globale de l'espace-temps. L'enjeu ici, on l'aura deviné, est de savoir s'il y a la place (i.e. une légitimité) pour une *cosmologie* dans une telle épistémologie. Faisant preuve d'un pragmatisme courant chez lui, Hermann Weyl défend quelques idées cosmologiques et publie quelques articles cosmologiques pendant notre période, même si la place de la cosmologie dans sa philosophie de l'espace-temps nous semble encore non élucidée. Cet état de fait prouve que cette problématique des questions (chrono-)géométriques globales et de la possibilité d'une cosmologie s'est posée à Hermann Weyl. On devrait donc pouvoir trouver au moins une esquisse de réponse à ces questions à l'intérieur du travail d'Hermann Weyl, réponse qu'il serait sans doute profitable de mettre en balance avec le courant philosophique adverse, franchement réaliste, où la possibilité d'une cosmologie est sans doute moins problématique.

Troisième ligne de recherche ouverte :
l'évolution des thèses d'Hermann Weyl, après le développement
de la mécanique quantique autours de l'année 1925

Cette troisième et dernière ligne de recherche que nous proposons est sans doute celle qui connait déjà le plus de développement. A partir de 1925, advient la seconde grande révolution du vingtième siècle dans la physique : l'établissement et l'adoption par la communauté des scientifique de la mécanique quantique, désormais appuyée sur des bases solides notamment grâces aux travaux de Werner Heisenberg, Max Born et Wolfgang Pauli.

Nous avons évoqué dans le dernier paragraphe précédant la conclusion comment le développement de cette théorie a définitivement entériné les changements dans la conception de la matière d'Hermann Weyl qui étaient déjà survenus à la fin de la période d'*Espace-Temps-Matière*, en particulier l'abandon du programme de réduction de la matière au champ au profit d'une ontologie dualiste matière/champ pour la physique, où le champ en vient à être conçu comme un simple transmetteur de l'information tandis que la véritable activité est à placer du côté de la matière.

Outre la confirmation de l'opportunité du changement opéré par Hermann Weyl dans son concept de matière, il est connu que la mécanique quantique a ouvert un nouveau champ d'application à certains concepts mathématiques élaborés par Hermann Weyl pendant l'époque du développement de sa géométrie infinitésimale pure. En particulier, on sait que l'idée d'une *théorie de jauge*, née dans les travaux d'Hermann Weyl sur le cas particulier des « espaces de Weyl » va connaître un heureux développement dans la mécanique quantique et occuper une place importante dans l'évolution de la physique du 20ème siècle. Dans la continuité de notre problématique, cela ouvre ainsi un axe de recherche consistant à rechercher, dans les écrits d'Hermann Weyl postérieur à la période 1917-1923 que nous avons abordé dans le présent travail, si la réadaptation des concepts mathématiques de la Nahegeometrie aux nouveaux problèmes qui se sont ouverts en physique à partir du milieu des années 1920, s'accompagne ou non d'une évolution dans les thèses épistémologique sous-jacentes.

Le mot de la fin...

Mis à part les axes de recherches ainsi dégagés pour de futures recherches, nous pensons que la philosophie de l'espace-temps d'Hermann Weyl, dans laquelle notre travail nous a amenés à nous plonger, restera pour nous une preuve de la fertilité d'une recherche scientifique qui travaille dans un dialogue continuel à double sens avec la philosophie. Cette dernière discipline, par son attitude critique, l'étendue des aspects de l'être et de la connaissance qu'elle met en œuvre, et la longue tradition des problèmes et des systèmes sur lesquelles elle s'appuie, peut servir d'aiguillon participant à donner un élan créatif à la science en marche, pourvue qu'elle se nourrisse en contrepartie des résultats en évolution de la science. Tel est la leçon épistémologique générale qui ressort de l'attitude adoptée par Hermann Weyl dans l'élaboration de son travail.

Hermann Weyl pensait que seule une telle interaction entre les grandes problématiques philosophiques et le génie de nombreux savants qui ont compté dans l'histoire des sciences a pu produire cet édifice magistral de la *théorie de la relativité générale* par lequel :

Quelques-uns des accords fondamentaux de cette harmonie des sphères, auxquels rêvaient Pythagore et Kepler, sont parvenus à nos oreilles. [RZM 1921, 284]

Bibliographie

Notre bibliographie comprendra seulement deux rubriques. La première contient les ouvrages de référence, c'est-à-dire ceux qui ont fourni la matière première à partir de laquelle a été construit le contenu de notre travail. La deuxième rubrique contient les ouvrages qui ont été seulement consultés, nous ont fourni juste une idée isolée, ou qui étaient plutôt annexes par rapport à notre problématique centrale. Les ouvrages sont rangés dans l'ordre alphabétique dans chaque rubrique, exception faite pour ceux d'Hermann Weyl qui sont placés en première position. Nous ne faisons pas entrer dans la bibliographie les œuvres qui n'ont été citées qu'à travers la littérature secondaire. Quand c'était le cas, nous avons donné les références de l'ouvrage en note de bas de page. La date entre crochet qui sert de sigle pour donner les références dans le corps de notre travail est la date de publication.

Ouvrages de référence

— **Weyl, Hermann**

[GA] ***Gesammelte Abhandlungen***, Vol. I-IV, K. Chandrasekharan (ed.), Berlin: Springer-Verlag, 1968

[RZM 1918], *Raum-Zeit-Materie*, 1ère édition, Berlin: Julius Springer

[RZM 1919], *Raum-Zeit-Materie*, 3ème édition, Berlin: Julius Springer

[RZM 1921], *Raum-Zeit-Materie*, 4ème édition, Berlin: Julius Springer

[RZM 1923], *Raum-Zeit-Materie*, 5ème édition, Berlin: Julius Springer

[1918a] ***Das Kontinuum. Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis***, Leipzig : Veit, 1918, cité d'après la traduction française par Jean Largeault dans *Le Continu et autres écrits*, Paris :Vrin, 1994

[1918b] Reine Infinitesimalgeometrie, *Mathematische Zeitschrift*, 1918, 2, p. 381-411, dans [Weyl, GA vol II, 1-28]

[1918c] Gravitation und Elektrizität, *Sitzungsberichte des Königlichen Preußischen Akademie des Wissenschaften zu Berlin*, 1918, p. 465-480, dans [Weyl, GA vol. II, 29-42].

[1923] ***Mathematische Analyse des Raumproblems,*** **Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid,** Berlin: Julius Springer, 1923

[1954] Erkenntnis und Bessinnung (Ein Lebensrückblick), *Studia Philosophica*, *Jahrbuch der schweizerischen philosophischen Gesellschaft*, dans [GA, vol IV, 631-649].

— **Chevalley, Claude et Weil, André**

[1957] Hermann Weyl (1885-1955), dans *L'enseignement mathématique* (2) 3, 157-187

— **Coleman Robert et Korté Herbert**

[Coleman et Korté, 2001], Hermann Weyl: Mathematician, Physicist, Philosopher, 4: Space time, dans [Scholz ed. 2001]

— **Einstein, Albert**

[1916] Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, *Annalen der Physik*, 1916, sér. 4, n°49, 769-822

— **Gauss, Carl Friedrich**

[1827]: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingesis Recentiores, Vol. VI, p.99–146, d'après la traduction française de M.E. Roger, *Recherches générales sur les surfaces courbes*, Paris : Albert Blanchard, 1967

— **Klein, Felix**

[1892]: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, *Mathematische Annalen*, 1893, 43, p. 63-100, programme lu en 1892 pour l'entrée à l'Université Friedrich-Alexanders d'Erlangen

— **Levi-Civita, Tullio**

[1917]: Nozione di parallelismo in una varieta qualunque et conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*,1917, 42, p. 173-205.

— **Michel, Alain**

[2006] La fonction de l'histoire dans la pensée mathématique et physique d'Hermann Weyl, *Kairos*, Presses universitaires du Miral, 2006, n°27 « Monde de la vie et histoire », p. 209-235.

— **Noether, Emmy**

[1918] Invariante Variationsprobleme, *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen:* Mathematisch-physikalische Klasse, 1918, p. 235–257

— **Norton, John**

[1987] Einstein, the Hole Argument and the Reality of Space, dans John Forge (ed.), *Measurement, Realism and Objectivity*, Dordrecht: Reidel, p. 153-188 .

[1988] The Hole Argument, dans A. Fine and J. Leplin (eds.), *PSA 1988*, Vol. 2, p. 56-64.

[1993] General Covariance and the Foundations of General Relativity: Eight Decades of Dispute, *Reports on Progress in Physics*, 56: 791-858.

— **Poincaré, Henri**

[1902] *La science et l'hypothèse*, Flammarion

— **Pyenson, Lewis**

[1982] « Relativity in Late Wilhelmian Germany : The Appeal to a Preestablished Harmony between Mathematics and Physics », *Archive for History of Exact Sciences*, 1982, 27, p. 137-155

— **Ricci, Gregorio et Levi-Civita, Tullio**

[1900]: Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications, *Mathematische. Annalen*, 1900, 54, p. 125-201

— **Riemann, Bernhard**

[1854] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, vol. 13, 1867 (texte lu par Riemann en 1854) Nous citons ce texte à partir de la traduction française des *Oeuvres de Riemann*.

— **Ryckman, Thomas**

[2005] ***The Reign of relativity*: Philosophvy and Physics 1915-1925,** Oxford University Press, 2005. Nous nous sommes surtout appuyés dans cet ouvrage sur l'introduction et les deux premiers chapitres.

— **Ryckman, Thomas et Mancosu, Paolo**

[2002] Mathematics and Phenomenology : The correspondence between O. Becker and H. Weyl, *Philosophia Mathematica*, 3e série, vol. 10, 2002, p. 130–173

— **Scholz, Erhard**

[**1994] Hermann Weyl's contribution to geometry, 1917-1923**, *The intersection of history and mathematics*,J. Dauben, S. Mitsuo, Basel: Birkhäuser, 1994, p.203-230.

[1995] Hermann Weyl's "Purely Infinitesimal Geometry". Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich Switzerland 1994. Basel: Birkhäuser, p. 1592–1603.

[1999] Weyl and the theory of connections, dans J. J. Gray ed., *The Symbolic Universe*: Geometry and Physics 1890 – 1930, Oxford: Oxford University Press, p. 260–284.

[2001] Weyls Infinitesimalgeometrie (1917 – 1925), dans E. Scholz (ed.): *Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to His Scientific Work*; Basel: Birkhäuser, p. 48–104.

[2004] Hermann Weyl's analysis of the "problem of space" and the origin of gauge, *Structures. Science in Context*, 17, p. 165-197.

[2006] The changing concept of matter in H. Weyl's thought, 1918-1930, dans Lützen, J. e.a,. (eds.) *The Interaction between Mathematics, Physics and Philosophy*, Dordrecht: Kluwer, p. 281-305

— **Scholz, Erhard (Ed.)**

[**2001]** ***Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a general introduction to his scientific work***, Erhard Scholz Ed. Basel, Berlin & Boston: Birkhaüser

— **Sieroka Norman**

[2007] Weyl's "Agens Theory" of Matter and the Zurich Fichte, *Studies in History and Philosophy of Science*, 38 (1), p. 84-107.

[2008] Geometrisation versus Transcendent Matter: A Systematic Historiography of Theories of Matter, *British Journal for the Philosophy of Science*.

[2009] Husserlian and Fichtean Leanings: Weyl on Logicism, Intuitionism, and Formalism, *Philosophia Scientiae*, 13 (2), p. 85-96.

— **Sigurdsson, Skuli**

[1991] « Hermann Weyl, mathematics and physics, 1900-1927 », thèse défendue à l'université d'Harvard en janvier 1991, éditée par U.M.I

Ouvrages seulement consultés ou secondaires par rapport à notre problématique

— **Weyl, Hermann**

[1913] ***Die Idee der Riemannschen Fläche,*** Leipzig et Berlin: G.Teubner, 1913

[1927] Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, *Handbuch der Philosophie***,** Münich et Berlin: R.Oldenbourg, 1927, consulté dans la version anglaise étendue: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton University Press, 1949.

— **Hilbert, David**

[1899] ***Grundlagen der Geometrie****,* Leipzig : B.G. Teubner, 1899.

[1900] Mathematische Probleme: Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900, *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klass*, Vandenhoeck & Ruprecht, 1900, 3, p.253–297.

[1916] "Die Grundlagen der physik" dans *Gesammelte Abhandlungen*, 1935, vol III, p.258-289.

— **Einstein, Albert**

[1905] Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik*, 1905, n°17, p. 891–921

— **Einstein, Albert et Grossman, Marcel**

[1913] Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der Gravitation, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1913, n°62, 225–261

— **Gray, Jeremy (Ed.)**

[1999] ***The symbolic universe, Geometry and Physics 1890-1930,*** Oxford University Press, 1999

— **Kant, Emmanuel**

[1781] ***Critik der reinen Vernunft***, surtout : Erster Theil. Die transzendentale Ästhetik

[1786] ***Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft***

— **O'Raifeartaigh, Lochlainn (Ed.)**

[1997] ***The dawning of gauge theory***, Princeton Series in Physics, Princeton University Press, 1997

— **Renn, Jürgen et Schemmel, Mathias (Eds.)**

[2007] Gravitation in the twilight of classical physics: the Promise of mathematics, *The genesis of general relativity* (vol. 4), Springer, série: *Boston Studies in the Philosophy of Science*, Springer, 2007, Volume 250

— **Stachel, John et Iftime, Mihaela**

[2006]. The Hole Argument for Covariant Theories, *General Relativity and Gravitation Journal*, Netherland: Springer, n°38, 1241-1252

Les fondements épistémologiques de la Nahegeometrie d'Hermann Weyl,

Une étude de la philosophie de l'espace-temps dans *ESPACE-TEMPS-MATIERE*

Résumé

Nous traitons des aspects philosophiques de la réflexion d'Hermann Weyl sur la notion d'espace(-temps) de 1917 à 1923. Il s'agit de sa période d'implication maximale dans les fondements de la théorie de la relativité générale et de la géométrie différentielle. Un point de vue unitaire nous est fourni par le texte d'*Espace-Temps-Matière* où notre auteur synthétise sa pensée.

Notre problématique nait du conflit, dans le texte, entre deux notions aux traits radicalement différents, qui participent toutes les deux à la caractérisation de la notion relativiste d'espace. D'un côté, la notion algébrique qui caractérise l'espace par son groupe de symétrie, et insiste sur son homogénéité. De l'autre, la notion dynamique de champ métrique, issue des travaux d'Albert Einstein, et que la dépendance à l'égard du contenu de l'espace rend nécessairement hétérogène.

Après avoir développés les points saillants originaux dans la façon dont Hermann Weyl traite successivement de ces deux notions, nous montrons comment leur cohabitation est rendue possible par l'idée d'une Nahegeometrie. Il s'agit d'une géométrie où les structures infinitésimales sont fixées *a priori* par des exigences de la raison, mais où les relations à distance ne sont déterminées qu'à travers la médiation de la matière et de ses lois. Ainsi, Hermann Weyl propose une épistémologie cohérente qui fait place à la fois, à un idéalisme transcendantal restreint à la sphère des relations infinitésimales, et à une théorie physique des champs qui exprime la continuité et la vitesse finie de propagation de toute interaction, y compris celles qui s'expriment à travers une déformation de la métrique spatio-temporelle elle-même.

Mots-clés : Philosophie de l'espace, espace-temps, Hermann Weyl, Nahegeometrie, idéalisme transcendantal, géométrie différentielle, variété à connexion, espace à connexion, physique des champs

Ce travail doctoral a été effectué au sein du laboratoire du CEPERC (Centre d'épistémologie et d'ergologie comparative) à Aix-en-Provence.

The epistemological foundations of Hermann Weyl's Nahegeometrie,

A study upon the philosophy of space(-time) in *Space-Time-Matter*

Abstract

In this dissertation, we examine Hermann Weyl's contributions to the concept of space(-time) between 1917 and 1923, during which he was extensively involved in the foundations of general relativity and differential geometry. Specifically, we focus on Hermann Weyl's unified view that is synthesized in *Space-Time-Matter*.

The problem considered arises from a conflict between two notions presented in *Space-Time-Matter* that both characterize the relativistic notion of space but with radically different properties. On one hand, Hermann Weyl presents an algebraic notion that characterizes space by its group of symmetries, and insists on its homogeneity. Of the other hand, he presents a dynamic notion of the metrical field, which stems from Albert Einstein's work, that depends on the contents of space, and is therefore inevitably heterogeneous.

We first present and elaborate on Hermann Weyl's original and striking contributions of to these two notions. Then, we discuss how these two seemingly conflicting notions can coexist in Hermann Weyl's mind, because of the idea of Nahegeometrie; that is, geometry where infinitesimal structures are given *a priori* by requirements of the reason, but where the remote relations are determined only through the mediation of matter and its laws. Therefore, Hermann Weyl is able to propose a coherent epistemology that contains both a transcendental idealism restricted to the sphere of infinitesimal relations and a physical theory of fields, which exhibits continuity and finite speed for any interactions, including those expressed by an influence on the metrics itself.

Keywords: Philosophy of space, space-time, Hermann Weyl, Nahegeometrie, transcendental idealism, differential geometry, connection (mathematics), manifold, field theory (physics)

This doctorate has been prepared at the CEPERC laboratory in Aix-en-Provence.